

Exercice 1 [4 points]

Résoudre l'équation différentielle (E): $y' = 4y + 20$ où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 [5 points]

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}$$

Exercice 3 [4 points]

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2 \text{ et } g(x) = x^3 \ln(x)$$

La fonction g est-elle une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$? Justifier.

Exercice 4 [7 points]

On note (E) l'équation différentielle $y' = -2y + 4x$ où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Il existe une fonction affine f_0 solution particulière de (E) : déterminer cette fonction.
2. On note (E_0) l'équation différentielle $y' = -2y$ où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$: donner la solution générale de (E_0) .
3. Donner la solution générale de (E).
4. La fonction g est une solution de (E), Γ est sa courbe représentative dans un repère du plan. On précise que la tangente à Γ au point d'abscisse nulle admet pour coefficient directeur 4 : déterminer la fonction g .

Corrigé

Exercice 1

Résoudre (E) : $y' = 4y + 20$, y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

L'équation différentielle $y' = 4y + 20$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 4$ et $b = 20$, dont la solution générale pour $a \neq 0$ est $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle.

On a :

$$-\frac{b}{a} = -\frac{20}{4} = -5$$

Donc en notant y la solution générale de (E), on a : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{4x} - 5$ où C est une constante réelle.

Exercice 2

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}$$

Posons $u(x) = x^2 + 5$, d'où : $u'(x) = 2x$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 5}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Or, une primitive de $\frac{u'}{u}$, $u > 0$, est $\ln u + k$ donc, en notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ on a :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \ln(u(x)) + k$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + k, k \text{ constante réelle.}$$

Exercice 3

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $f(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2$ et $g(x) = x^3 \ln(x)$.

Montrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Dire que g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$ revient à dire que $g' = f$ sur $]0; +\infty[$.

$$g(x) = x^3 \times \ln(x)$$

$$\text{Rappel : } (uv)' = u'v + v'u \text{ et } \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 3x^2 \times \ln(x) + \frac{1}{x} \times x^3$$

$$g'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2$$

$$\text{Or, } 3x^2 \ln(x) + x^2 = f(x) \text{ donc } g'(x) = f(x).$$

On a : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = f(x)$ donc g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 4

(E) : $y' = -2y + 4x$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1. Il existe une fonction affine f_0 solution particulière de (E) : déterminer cette fonction.

f_0 est une fonction affine donc il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout réel x , $f_0(x) = ax + b$. On a : $f_0'(x) = a$, or f_0 est une solution (particulière) de (E) donc pour tout réel x : $f_0'(x) = -2f_0(x) + 4x$.

On a donc, pour tout réel x :

$$a = -2(ax + b) + 4x \Leftrightarrow a = -2ax - 2b + 4x \Leftrightarrow 0 = (-2a + 4)x - 2b - a = 0$$

$$\text{d'où par identification : } \begin{cases} -2a + 4 = 0 \\ -2b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = 2x - 1$.

Vérification

- $\forall x \in \mathbb{R}, f_0'(x) = 2$

- $\forall x \in \mathbb{R}, -2f_0(x) + 4x = -2(2x - 1) + 4x = -4x + 2 + 4x = 2$

$\forall x \in \mathbb{R}, f_0'(x) = -2f_0(x) + 4x$ donc f_0 est bien une solution (particulière) de (E).

2. Solution générale de (E_0) : $y' = -2y$

L'équation différentielle $y' = -2y$ est de la forme $y' = \alpha y$ avec $\alpha = -2$, dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\alpha x}$, C constante réelle, donc les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-2x}$, C constante réelle.

3. Solution générale de (E)

D'après le cours, on a :

« solution générale de (E) = solution générale de (E_0) + une solution particulière de (E) »

Or, la solution générale de (E_0) est $x \mapsto Ce^{-2x}$ et $f_0 : x \mapsto 2x - 1$ est une solution particulière de (E) donc en notant y la solution générale de (E) :

$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{-2x} + 2x - 1$, C constante réelle.

1	RésolEquaDiff(y'=-2y+4x)
☐	$\rightarrow y = c_1 e^{-2x} + 2x - 1$

4. La fonction g est une solution de (E), Γ est sa courbe représentative dans un repère du plan et la tangente à Γ au point d'abscisse nulle admet pour coefficient directeur 4. Déterminer la fonction g .

g est une solution (particulière) de (E) donc il existe une constante C telle que, pour tout réel x , $g(x) = Ce^{-2x} + 2x - 1$, d'où $g'(x) = -2Ce^{-2x} + 2$.

La tangente à Γ admet pour coefficient directeur 4 autrement dit $g'(0) = 4$.

$$-2Ce^{-2(0)} + 2 = 4 \Leftrightarrow -2C \times 1 = 2 \Leftrightarrow -2C = 2 \Leftrightarrow C = -1$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -e^{-2x} + 2x - 1$.