

Exercice 1 [9 points : 2 pts + 3 pts + 4 pts]

Résoudre :

$$1. \ln(x) = -2 \qquad 2. e^x \leq 3 \qquad 3. \ln(6x + 4) + \ln(2x + 1) = \ln(x + 1).$$

Problème [11 points]

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie I Étude d'une fonction particulière

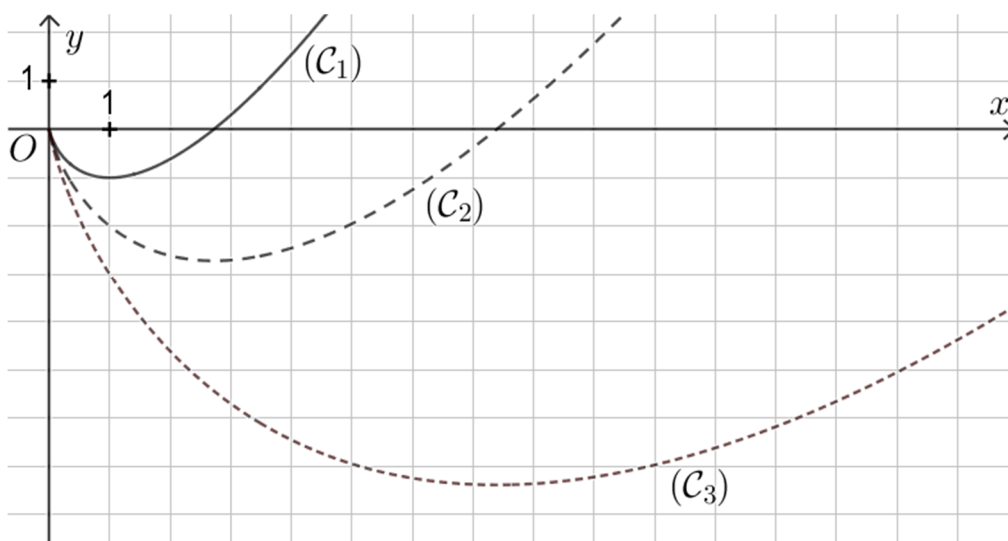
Soit f_1 définie sur $\mathcal{D} =]0 ; +\infty[$ par : $f_1(x) = x \ln(x) - x$ et on note $(\mathcal{C}_1)$ sa courbe représentative.

- Déterminer $f_1'(x)$, en étudier le signe, dresser de tableau de variation de f_1 sans les limites.
- La courbe $(\mathcal{C}_1)$ coupe l'axe des abscisses en B_1 : déterminer l'abscisse α_1 de B_1 puis l'équation réduite de la tangente T_1 à $(\mathcal{C}_1)$ en B_1 .
- Étudier la convexité de f_1 .

Partie II Étude d'une famille de fonctions (f_n) où $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie sur $\mathcal{D} =]0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = x \ln(x) - nx$ et on note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative.

- Calculer $f_n'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f_n sans les limites.
- La courbe $(\mathcal{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en B_n .
 - Déterminer l'abscisse α_n de B_n .
 - On note T_n la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ en B_n : les droites T_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sont-elles parallèles entre-elles ?
- On note A_n le point de $(\mathcal{C}_n)$ d'abscisse $x_n = e^{n-1}$.
 - Déterminer l'ordonnée y_n de A_n en fonction de n .
 - Démontrer que les points A_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sont alignés et donner l'équation réduite de la droite d les contenant tous.
- On a représenté ci-dessous $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$: placer A_1 , tracer d puis placer A_2 et A_3 ainsi que les tangentes à $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ en A_1 , A_2 et A_3 respectivement.



- Déterminer la limite de la suite (x_n) .
- BONUS : les droites $(A_n B_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont-elles parallèles entre-elles ?

Corrigé

Exercice 1

1. $\ln(x) = -2$

• domaine d'existence : $\mathcal{D} =]0; +\infty[$

• résolution :

Pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a les équivalences :

$$\ln(x) = -2 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

$e^{-2} \in \mathcal{D}$ donc est accepté

$$\mathcal{S} = \{e^{-2}\}$$

2. $e^x \leq 3$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$e^x \leq 3 \Leftrightarrow \ln(e^x) \leq \ln(3) \Leftrightarrow x \leq \ln(3)$$

$$\mathcal{S} =]-\infty; \ln(3)]$$

3. $\ln(6x + 4) + \ln(2x + 1) = \ln(x + 1)$

• Domaine d'existence :

$$\begin{cases} 6x + 4 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x > -4 \\ 2x > -1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{6} \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{D} = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

• Résolution :

Rappelons que pour $a > 0$ et $b > 0$ on a : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \ln(6x + 4) + \ln(2x + 1) &= \ln(x + 1) \\ \Leftrightarrow \ln[(6x + 4)(2x + 1)] &= \ln(x + 1) \\ \Leftrightarrow (6x + 4)(2x + 1) &= x + 1 \\ \Leftrightarrow 12x^2 + 6x + 8x + 4 &= x + 1 \\ \Leftrightarrow 12x^2 + 14x + 4 - x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 12x^2 + 13x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$12x^2 + 13x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 12$, $b = 13$ et $c = 3$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4(12)(3) = 25$.

$\Delta > 0$ donc $12x^2 + 13x + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 - \sqrt{25}}{2(12)} = \frac{-13 - 5}{24} = \frac{-18}{24} = -\frac{3}{4} \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 + \sqrt{25}}{2(12)} = \frac{-13 + 5}{24} = \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Or : $-\frac{3}{4} \notin \mathcal{D}$ donc est refusé et $-\frac{1}{3} \in \mathcal{D}$ donc est accepté, finalement : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie I Étude d'une fonction

$\forall x \in \mathcal{D} =]0; +\infty[$, $f_1(x) = x \ln(x) - x$; $(\mathcal{C}_1)$ est sa courbe représentative

1. Déterminer $f_1'(x)$, en étudier le signe, dresser de tableau de variation de f_1 sans les limites.

• calcul de $f_1'(x)$

f_1 est produit et différence de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs donc elle est dérivable sur $\mathcal{D}$

$$f_1(x) = x \ln(x) - x$$

Rappel : $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$f_1'(x) = 1 \times \ln(x) + \frac{1}{x} \times x - 1$$

$$f_1'(x) = \ln(x) + 1 - 1$$

$$f_1'(x) = \ln(x)$$

On a donc : $\forall x \in \mathcal{D}, f_1'(x) = \ln(x)$.

• **signe de $f_1'(x)$ et sens de variation de f_1**

Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $\ln(x) > 0$.

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a les équivalences :

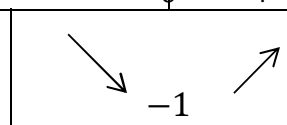
$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$$

Le signe de $f_1'(x)$ donne le sens de variation de f_1 :

- $f_1'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ et f_1 est continue sur $[1; +\infty[$ donc f_1 est strictement croissante sur $[1; +\infty[$
- $f_1'(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et f_1 est continue sur $]0; 1]$ donc f_1 est strictement décroissante sur $]0; 1]$
- $f_1'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$

On a : $f_1(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = 1 \times 0 - 1 = -1$.

Tableau de variation de f_1 :

x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$		-	+
Sens de variation de f_1			

2. La courbe $(\mathcal{C}_1)$ coupe l'axe des abscisses en B_1 : déterminer l'abscisse α_1 de B_1 puis l'équation réduite de la tangente T_1 à $(\mathcal{C}_1)$ en B_1 .

• **calcul de l'abscisse α_1**

α_1 est la solution de l'équation $f_1(x) = 0$.

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a les équivalences :

$$x \ln(x) - x = 0 \Leftrightarrow x(\ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^1 \Leftrightarrow x = e$$

Conclusion : $\alpha_1 = e$.

• **équation réduite de T_1**

T_1 admet pour équation : $y = f_1'(e)(x - e) + f_1(e)$.

Or, $f_1'(e) = \ln(e) = 1$ et $f_1(e) = 0$, on obtient : $y = 1(x - e) + 0$ autrement dit : $y = x - e$

L'équation réduite de T_1 est : $y = x - e$.

3. Convexité de f_1

f_1' est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $f_1''(x) = \frac{1}{x}$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f_1''(x) > 0$ donc f_1 est convexe sur $\mathcal{D}$.

Partie II Étude d'une famille de fonctions

$n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathcal{D} =]0; +\infty[, f_n(x) = x \ln(x) - nx ; (\mathcal{C}_n)$ est sa courbe représentative

1. Calculer $f'_n(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f_n sans les limites.

$$f_n(x) = x \ln(x) - nx$$

$$f'_n(x) = 1 \times \ln(x) + \frac{1}{x} \times x - n$$

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'_n(x) = \ln(x) + 1 - n.$$

Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $\ln(x) + 1 - n > 0$.

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a les équivalences :

$$\ln(x) + 1 - n > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 + n \Leftrightarrow e^{\ln(x)} > e^{-1+n} \Leftrightarrow x > e^{n-1}$$

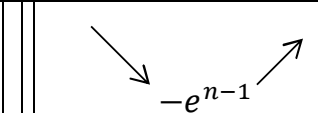
Le signe de $f'_n(x)$ donne le sens de variation de f_n :

- sur $]e^{n-1}; +\infty[, f'_n(x) > 0$ et f_n est continue sur $[e^{n-1}; +\infty[$, donc $f_n \nearrow$ sur $[e^{n-1}; +\infty[$
- sur $]0; e^{n-1}[$, $f'_n(x) < 0$ et f_n est continue sur $]0; e^{n-1}]$, donc $f_n \searrow$ sur $]0; e^{n-1}]$

On a :

$$\begin{aligned} f_n(e^{n-1}) &= e^{n-1} \ln(e^{n-1}) - n \times e^{n-1} = e^{n-1}(n-1) - ne^{n-1} = ne^{n-1} - e^{n-1} - ne^{n-1} \\ &= -e^{n-1} \end{aligned}$$

tableau de variation de f_n

x	0	e^{n-1}	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	+
Sens de variation de f_1			

2. La courbe $(\mathcal{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en B_n .

a. abscisse α_n de B_n

Pour $x \in \mathcal{D}$ on a les équivalences : $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln(x) - nx = 0 \Leftrightarrow x(\ln(x) - n) = 0$.

$$\Leftrightarrow \ln(x) - n = 0 \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow \ln(x) = n \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^n \Leftrightarrow x = e^n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = e^n$.

b. Les droites $T_n, n \in \mathbb{N}^*$, sont-elles parallèles entre-elles ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la droite T_n admet pour coefficient directeur

$$f'_n(\alpha_n) = \ln(e^n) + 1 - n = n + 1 - n = 1$$

Toutes les droites $T_n, n \in \mathbb{N}^*$, admettent pour coefficient directeur la constante 1

donc les droites $T_n, n \in \mathbb{N}^*$, sont parallèles entre-elles.

3. On note A_n le point de $(\mathcal{C}_n)$ d'abscisse $x_n = e^{n-1}$.

a. Déterminer l'ordonnée y_n de A_n .

$A_n(x_n; y_n) \in \mathcal{C}_n$ donc $y_n = f(x_n)$, d'où $y_n = f(e^{n-1}) = -e^{n-1}$ (voir tableau de variation)

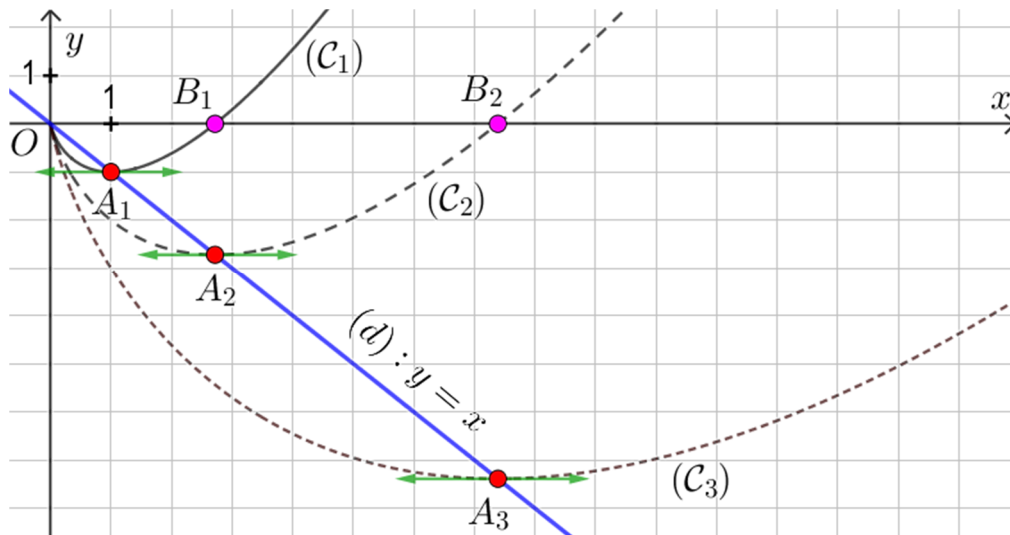
Finalement : $y_n = -e^{n-1}$.

b. Démontrer que les points $A_n, n \in \mathbb{N}^*$, sont alignés suivant une droite d dont on donnera l'équation réduite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n = e^{n-1}$ et $y_n = -e^{n-1}$ donc $y_n = -x_n$ ce qui montre que A_n appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Conclusion : les points $A_n, n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent à d d'équation réduite $y = -x$.

4. Placer A_1 , tracer d puis placer A_2 et A_3 et les tangentes en ces points à (C_1) , (C_2) , (C_3)



5. **Limite de la suite (x_n)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = e^{n-1}$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n-1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} e^N = +\infty$ (cours)

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Complément

On peut montrer que la suite (x_n) est géométrique.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = e^{n-1}$, donc :

$$x_{n+1} = e^{n+1-1} = e^{n-1+1} = e^{n-1} \times e^1 = x_n \times e$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = e \times x_n$ et e est une constante, donc la suite (x_n) est géométrique de raison e .

6. **BONUS : les droites $(A_n B_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont-elles parallèles entre-elles ?**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$A_n(x_n; y_n)$ avec $x_n = e^{n-1}$ et $y_n = -e^{n-1}$ donc $A_n(e^{n-1}; -e^{n-1})$

$B_n(\alpha_n; 0)$ avec $\alpha_n = e^n$ donc $B_n(e^n; 0)$

On a $n-1 \neq n$ donc $e^{n-1} \neq e^n$ par conséquent la droite $(A_n B_n)$ n'est pas verticale ; elle admet pour coefficient directeur :

$$\frac{y_{B_n} - y_{A_n}}{x_{B_n} - x_{A_n}} = \frac{0 - (-e^{n-1})}{e^n - e^{n-1}} = \frac{e^{n-1}}{e^{n-1}(e^1 - 1)} = \frac{1}{e - 1}$$

Les droites $(A_n B_n)$ ont toutes pour coefficient directeur la constante $\frac{1}{e-1}$ donc elles ont toutes le même coefficient directeur donc sont parallèles entre-elles.

Résumons : **toutes les droites $(A_n B_n)$ sont parallèles entre-elles.**

Complément

$$x_{B_n} = \alpha_n = e^n = e^{n+1-1} = e^{(n+1)-1} = x_{A_{n+1}}$$

par conséquent les points B_n et A_{n+1} sont une même droite verticale.