CS 04 Spécialité maths **Jeudi 21 décembre 2023**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 55 min**

NOM :
Prénom :

Gr Thiaude P.

<u>Exercice 1</u> [3 pts] Q.C.M.

On considère l'ensemble à 5 éléments $E = \{a; b; c; d; e\}$; cocher la(les) affirmation(s) exactes :

① un exemple de triplet d'éléments E est :
☐ 5×3 ☐ $\{a; b; e\}$ ☐ (a, b, a) ☐ (c, a, e)

② combien y a-t-il de triplets d'éléments de E ?
☐ 5×3 ☐ 3^5 ☐ 5^3 ☐ $\binom{5}{3}$ ☐ $5 \times 4 \times 3$

③ un exemple d'arrangement de 3 éléments E est :
☐ $\{c; e; a\}$ ☐ (a, c, c) ☐ (a, b, a) ☐ (c, e, a) ☐ $5 \times 4 \times 3$

④ combien y a-t-il d'arrangements de 3 éléments de E ?
☐ 5×3 ☐ 3^5 ☐ 5^3 ☐ $3!$ ☐ $5 \times 4 \times 3$

⑤ un exemple de combinaison de 3 d'éléments E est :
☐ $\{a; b; e\}$ ☐ (a, c, c) ☐ (a, b, a) ☐ $(1,4,5)$ ☐ $3!$

⑥ combien y a-t-il de combinaisons de 3 éléments de E ?
☐ 3^5 ☐ 5^3 ☐ $\binom{5}{3}$ ☐ $5 \times 4 \times 3$ ☐ 5×3

<u>Exercice 2</u> [6 pts]

Dans un jeu de 32 cartes il y a 4 couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle) et 8 valeurs (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) ; une « main » est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

1. Combien existe-t-il de mains ?
2. Combien de mains contiennent trois As et deux Dames ?
3. On appelle «full» une main ayant trois cartes d'un même valeur combinées à deux autres cartes d'une même valeur : combien y a-t-il de fulls ?

<u>Exercice 3</u> [2 pt]

Calculer : $A = \binom{1\,850}{734} + \binom{1\,850}{735} - \binom{1\,851}{735}$.

<u>Exercice 4</u> [4 pts]

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot : **1.** JAUNE **2.** SOLEIL **3.** AIMAIT

<u>Exercice 5</u> [3 pts]

Déterminer le(s) entier(s) naturel(s) $x \geqslant 2$ tel(s) que : $\binom{x}{2} = 300$.

<u>Exercice 6</u> [2 pts]

(admis) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

1. Calculer : $2^0 \binom{4}{0} + 2^1 \binom{4}{1} + 2^2 \binom{4}{2} + 2^3 \binom{4}{3} + 2^4 \binom{4}{4}$.
2. A-t-on pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

Corrigé

Exercice 1 **Q.C.M.**

On considère l'ensemble à 5 éléments $E = \{a; b; c; d; e\}$; cocher la(les) affirmation(s) exactes

① un exemple de triplet d'éléments E est :

☐ 5×3 ☐ $\{a; b; e\}$ ☒ (a, b, a) ☒ (c, a, e)

② combien y a-t-il de triplets d'éléments de E ?

☐ 5×3 ☐ 3^5 ☒ 5^3 ☐ $\binom{5}{3}$ ☐ $5 \times 4 \times 3$

③ un exemple d'arrangement de 3 éléments de E est :

☐ $\{c; e; a\}$ ☐ (a, c, c) ☐ (a, b, a) ☒ (c, e, a) ☐ $5 \times 4 \times 3$

④ combien y a-t-il d'arrangements de 3 éléments de E ?

☐ 5×3 ☐ 3^5 ☐ 5^3 ☐ $3!$ ☒ $5 \times 4 \times 3$

⑤ un exemple de combinaison de 3 d'éléments E est :

☒ $\{a; b; e\}$ ☐ (a, c, c) ☐ (a, b, a) ☐ $(1,4,5)$ ☐ $3!$

⑥ combien y a-t-il de combinaisons de 3 éléments de E ?

☐ 3^5 ☐ 5^3 ☒ $\binom{5}{3}$ ☐ $5 \times 4 \times 3$ ☐ 5×3

Exercice 2

On considère un jeu de 32 cartes : il y a 4 couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle) et 8 valeurs (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As). On appelle « main » la donnée de 5 cartes de ce jeu, distinctes et sans ordre, c'est-à-dire une partie à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

1. **Combien existe-t-il de mains ?**

   Une main est une combinaison de 5 cartes d'un ensemble à 32 cartes, il y en a :

   $$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,(32-5)!} = \frac{32!}{5!\,27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
   $$= 201\,376$$

   Il y a **$201\,376$ mains**.

2. **Combien de mains contiennent 3 As et 2 Dames ?**

   méthode des cases

3 As	**2 Dames**
$\binom{4}{3}$ choix	$\binom{4}{2}$ choix

   Les choix se multiplient.

   $$\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = \frac{4!}{3!\,1!} \times \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \times 3!}{3!} \times \frac{4 \times 3!}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 4 \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

   Il y a **24 mains contennat 3 As et 2 Dames**.

3. **Combien y a-t-il de full ?**

   Déterminons d'abord le nombre de fulls 3 As et 2 Rois :

   - on choisit 3 cartes parmi les 4 As, il y a $\binom{4}{3}$ façons de procéder,

   - on choisit 2 cartes parmi les 4 Rois : il y a $\binom{4}{2}$ façons de procéder.

Les choix se multiplient donc il y a : $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$ fulls 3 As et 2 Rois. Or, il y a 8 choix pour la valeur des trois cartes (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8) puis seulement $8 - 1 = 7$ choix pour la valeur des deux autres cartes, par conséquent il y a : $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} \times 8 \times 7$ fulls possibles.

Or, on a :

$$\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} \times 8 \times 7 = \frac{4!}{3!\,1!} \times \frac{4!}{2!\,2!} \times 8 \times 7 = \frac{4 \times 3!}{3!} \times \frac{4 \times 3!}{2 \times 2} \times 56 = 4 \times 3 \times 2 \times 56 = 1\,344$$

Il y a donc $\mathbf{1\,344}$ **fulls possibles**.

Exercice 3

$A = \binom{1850}{734} + \binom{1850}{735} - \binom{1851}{735}$

La formule du triangle de Pascal s'écrit : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ donc pour $n = 1850$ et $k = 734$ on obtient : $\binom{1850}{734} + \binom{1850}{735} = \binom{1851}{735}$ puis en retranchant $\binom{1851}{735}$ à chaque membre on obtient : $\binom{1850}{734} + \binom{1850}{735} - \binom{1851}{735} = 0$.

Conclusion : $\boldsymbol{A = 0}$.

Exercice 4

1. **Déterminer le nombre d'anagrammes du mot : JAUNE**.
   Les lettres J, A, U, N et E étant toutes distinctes, une anagramme du mot JAUNE est une permutation des 5 lettres J, A, U, N, E : il y en a 5!, or $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ donc il y a $\mathbf{120}$ **anagrammes du mot JAUNE**.

2. **Déterminer le nombre d'anagrammes du mot : SOLEIL**.
   • distinguons les deux L
   il y a 6! anagrammes du mot SOL_1EIL_2

   • ne distinguons plus les deux L
   Un mot sans distinction des deux L correspond à deux mots les distinguant, donc il y a $\frac{6!}{2}$ anagrammes du mot SOLEIL. Or :

$$\frac{6!}{2} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 360$$

   Donc il y a $\mathbf{360}$ **anagrammes du mot SOLEIL**.

3. **Déterminer le nombre d'anagrammes du mot : AIMAIT**.
   Si l'on distingue les deux A et les deux I alors il y a : 6! anagrammes.
   Pour un tel mot, il y a $2! = 2$ permutations des deux lettres A_1, A_2 et il y a $2! = 2$ permutations des deux lettres I_1, I_2 donc il y a $\frac{6!}{2!2!}$ anagrammes du mot AIMAIT.
   Or,

$$\frac{6!}{2!\,2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 180$$

   donc il y a $\mathbf{180}$ **anagrammes du mot AIMAIT**.

__**Exercice 5**__

Déterminer le(s) entier(s) naturel(s) $x \geqslant 2$ tel(s) que : $\boldsymbol{\binom{x}{2} = 300}$.

Pour $x \geqslant 2$ on a les équivalences :

$$\binom{x}{2} = 300 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 300 \Leftrightarrow x^2 - x = 600 \Leftrightarrow x^2 - x - 600 = 0$$

$x^2 - x - 600$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 600$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-600) = 1 + 2\,400 = 2\,401$$

$\Delta > 0$ donc $x^2 - x - 600$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1-\sqrt{2\,401}}{2(1)} = \frac{1-49}{2} = \frac{-48}{2} = -24 \notin \mathbb{N} \text{ donc est refusé}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1+\sqrt{2\,401}}{2(1)} = \frac{1+49}{2} = \frac{50}{2} = 25 \in \mathbb{N} \text{ et } 25 \geqslant 2 \text{ donc est accepté}$$

L'entier cherché est : $\boldsymbol{25}$.

__**Exercice 6**__

1. **Calculons $2^0\binom{4}{0} + 2^1\binom{4}{1} + 2^2\binom{4}{2} + 2^3\binom{4}{3} + 2^4\binom{4}{4}$:**

$$\begin{aligned}
&2^0\binom{4}{0} + 2^1\binom{4}{1} + 2^2\binom{4}{2} + 2^3\binom{4}{3} + 2^4\binom{4}{4}\\
&= 1 \times 1 + 2 \times 4 + 4 \times \frac{4 \times 3}{2} + 8 \times 4 + 16 \times 1\\
&= 1 + 8 + 24 + 32 + 16\\
&= 81
\end{aligned}$$

on a donc : $2^0\binom{4}{0} + 2^1\binom{4}{1} + 2^2\binom{4}{2} + 2^3\binom{4}{3} + 2^4\binom{4}{4} = \mathbf{81}$

2. **Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n}$$

Formule du binôme de Newton :

$$\text{(admis)} \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Pour $a = 1$ et $b = 2$, elle donne :

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k$$

Or, $1 + 2 = 3$ et pour tout $k \in \{0; \dots; n\}$ on a $1^{n-k} = 1$ donc :

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

ou encore : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.