CS 03 Spécialité maths **Lundi 4 décembre 2023** **Gr Thiaude P.**

Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 30 min**

<u>Exercice 1</u> [9 pts] [2 pt + 1 pt + 4 pts + 2 pt]

Calculer chacune des limites suivantes :

1. $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x-5)$

2. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+3\right)$

3. $\lim_{x\to+\infty}(\sin(x)-e^x)$

4. $\lim_{x\to-\infty}[(x-7)e^{x-7}]$

<u>Exercice 2</u> [5 pts]

Pour tout réel x, on pose :

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{x^2+7}+2$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

Montrer que f admet une limite en $+\infty$, interpréter graphiquement.

<u>Exercice 3</u> [4 pts]

Pour $x\neq 3$ on pose :

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{-x+3}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

Déterminer $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)$ puis interpréter graphiquement.

<u>Exercice 4</u> [2 pts]

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}\right)$$

Corrigé

Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x-5)$

Pour tout $x\neq 0$, on a : $x^2+3x-5=x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)$. On a d'une part : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et d'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)=1$. Par limite d'un produit, on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)\right]=+\infty$. Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x-5)=+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+3\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ (cours) donc par limite d'une somme on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+3\right)=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin(x)-e^x)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$.

En retranchant e^x à chaque membre : $-1-e^x\leqslant\sin(x)-e^x\leqslant 1-e^x$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^x)=-\infty$ puis par limite d'une différence : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^x)=-\infty$

On a : $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}, \sin(x)-e^x\leqslant 1-e^x\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^x)=-\infty\end{cases}$ donc, d'après le théorème de comparaison on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin(x)-e^x)=-\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}[(x-7)e^{x-7}]$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-7)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}[(x-7)e^{x-7}]=\lim\limits_{X\to-\infty}(Xe^X)=0$ (cours), on en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty}[(x-7)e^{x-7}]=0$.

Exercice 2

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^2+7}+2$, **montrer que f admet une limite en $+\infty$, interpréter graphiquement**

Pour tout réel x on a : $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$, donc en divisant par $x^2+7>0$ on en déduit :

$$\frac{-1}{x^2+7}\leqslant\frac{\cos(x)}{x^2+7}\leqslant\frac{1}{x^2+7}$$
$$-\frac{1}{x^2+7}\leqslant\frac{\cos(x)}{x^2+7}\leqslant\frac{1}{x^2+7}$$

puis, en ajoutant 2 à chaque membre :

$$-\frac{1}{x^2+7}+2\leqslant\frac{\cos(x)}{x^2+7}+2\leqslant\frac{1}{x^2+7}+2$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+7)=+\infty$, puis : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+7}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2+7}\right]=0$ puis par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2+7}+2\right]=2$.

De même, on montrerait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2+7}+2\right]=2$.

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x^2+7}+2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x^2+7}+2\right]=2\\ \forall x\in\mathbb{R}, -\dfrac{1}{x^2+7}+2\leqslant\dfrac{\cos(x)}{x^2+7}+2\leqslant\dfrac{1}{x^2+7}+2\end{cases}$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos(x)}{x^2+7}+2\right]=2$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

La **droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de** $+\infty$.

Exercice 3

$\forall x \neq 3, f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{-x + 3}$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x)$ puis interpréter graphiquement.

On a : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

Tableau de signes :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x+3$	$+$	0	$-$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (x^2 - x - 2) = 3^2 - 3 - 2 = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (-x + 3) = 0^+$, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \frac{x^2-x-2}{-x+3} = +\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (x^2 - x - 2) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (-x + 3) = 0^-$ donc par limite d'un quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \frac{x^2-x-2}{-x+3} = -\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = -\infty$.

On déduit des limites précédentes que **la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}_f$**.

Exercice 4

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} = \frac{\left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 + 4 - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 4) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ (cours)

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ (cours)

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}) = +\infty$ puis par limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}} = 0$.

Conclusion :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1}\right) = 0$$