

Exercice 1 [6 pts]

Calculer chacune des limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+5}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-4x+1} + \cos(7x^2 + 5))$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 4} - 3x)$

Exercice 2 [4 pts]

Pour tout réel x , on pose :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x + 2} + 4$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$, si elle existe.

Exercice 3 [10 pts]

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne $A(3; -1; 4)$ et $B(1; 2; 3)$.

On note Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 7 - 10t \\ y = 1 + 7t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Les droite (AB) et Δ sont-elles parallèles ?

2. Donner une représentation paramétrique de (AB) .

3. Les droites (AB) et Δ sont-elles sécantes ?

Dans l'affirmative donner les coordonnées de leur point d'intersection E .

4. La droite Δ coupe le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en F : calculer les coordonnées de F .

Corrigé

Exercice 1

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+5}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 5) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+5} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ (cours), conclusion : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+5} = 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \text{ (cours), conclusion : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3} = +\infty$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-4x+1} + \cos(7x^2 + 5))$

Pour tout réel x , on a : $-1 \leq \cos(7x^2 + 5) \leq 1$, puis en ajoutant e^{-4x+1} à chaque membre on obtient :

$$-1 + e^{-4x+1} \leq \cos(7x^2 + 5) + e^{-4x+1} \leq 1 + e^{-4x+1}$$

donc pour tout réel x :

$$e^{-4x+1} - 1 \leq e^{-4x+1} + \cos(7x^2 + 5) \leq e^{-4x+1} + 1$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-4x+1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ (cours)

Par limite d'une différence on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-4x+1} - 1) = +\infty$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-4x+1} + \cos(7x^2 + 5)) = +\infty$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 4} - 3x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9x^2 + 4) = +\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 4} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \text{ (cours)}$$

Par limite d'une différence on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 4} - 3x) = +\infty$.

Exercice 2

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x + 2} + 4$, limite de f en $+\infty$

Pour tout réel x , on a : $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc en divisant par $e^x + 2 > 0$ on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{-1}{e^x + 2} &\leq \frac{\sin(x)}{e^x + 2} \leq \frac{1}{e^x + 2} \\ -\frac{1}{e^x + 2} &\leq \frac{\sin(x)}{e^x + 2} \leq \frac{1}{e^x + 2} \end{aligned}$$

En ajoutant 4 à chaque membre :

$$-\frac{1}{e^x + 2} + 4 \leq \frac{\sin(x)}{e^x + 2} + 4 \leq \frac{1}{e^x + 2} + 4$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ (cours) donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2) = +\infty$, puis : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 2} = 0$.

Par limite d'une somme on en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{e^x + 2} + 4 \right] = 4$.

De même, on montrerait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^x + 2} + 4 \right] = 4$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{e^x + 2} + 4 \right] = 4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^x + 2} + 4 \right] = 4 \\ \forall x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{e^x + 2} + 4 \leq \frac{\sin(x)}{e^x + 2} + 4 \leq \frac{1}{e^x + 2} + 4 \end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin(x)}{e^x + 2} + 4 \right] = 4$.

Exercice 3

$$(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad A(3; -1; 4) \quad B(1; 2; 3) \quad \Delta : \begin{cases} x = 7 - 10t \\ y = 1 + 7t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

1. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 2 + 1 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'autre part $\vec{u} \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ .

Les droites (AB) et Δ sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de (AB) et un vecteur directeur de Δ (au choix) sont colinéaires autrement dit si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$. On a :

$$\begin{cases} -10 = k \times (-2) \\ 7 = k \times 3 \\ -2 = k \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{2} \\ k = \frac{7}{3} \\ k = 2 \end{cases} \text{ IMPOSSIBLE}$$

Il n'existe pas $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les droites (AB) et Δ ne sont pas parallèles.

2. Donner une représentation paramétrique de (AB) .

$A(3; -1; 4) \in (AB)$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) donc une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Les droites (AB) et Δ sont-elles sécantes ? Si oui coordonnées de leur point d'intersection E .

Cherchons s'il existe $(\lambda, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} 3 - 2\lambda = 7 - 10t \\ -1 + 3\lambda = 1 + 7t \\ 4 - \lambda = 3 - 2t \end{cases}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 - 2\lambda = 7 - 10t \\ -1 + 3\lambda = 1 + 7t \\ 4 - \lambda = 3 - 2t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2\lambda = 7 - 10t \\ -1 + 3\lambda = 1 + 7t \\ \lambda = 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t + 1 \\ 3 - 2\lambda = 7 - 10t \\ -1 + 3\lambda = 1 + 7t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t + 1 \\ 3 - 2(2t + 1) = 7 - 10t \\ -1 + 3(2t + 1) = 1 + 7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t + 1 \\ 3 - 4t - 2 = 7 - 10t \\ -1 + 6t + 3 = 1 + 7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t + 1 \\ 10t - 4t = 7 + 2 - 3 \\ -1 + 3 - 1 = 7t - 6t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t + 1 \\ 6t = 6 \\ 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t + 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Il existe un tel couple (λ, t) donc les deux droites (AB) et Δ sont sécantes. En utilisant la représentation

paramétrique de Δ , pour $t = 1$ on obtient : $\begin{cases} x = 7 - 10(1) = 7 - 10 = -3 \\ y = 1 + 7(1) = 1 + 7 = 8 \\ z = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

(AB) et Δ sont sécantes en $E(-3; 8; 1)$.

On peut pour vérifier utiliser la représentation paramétrique de (AB) en faisant $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} x = 3 - 2(3) = 3 - 6 = -3 \\ y = -1 + 3(3) = -1 + 9 = 8 \\ z = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

On retrouve bien les coordonnées de E .

4. La droite Δ coupe le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en F : calculer les coordonnées de F .

Tout point du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ a une cote nulle (et réciproquement) donc on cherche t tel que :

$$\begin{cases} x = 7 - 10t \\ y = 1 + 7t \\ 0 = 3 - 2t \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} x = 7 - 10t \\ y = 1 + 7t \\ 0 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = 7 - 10\left(\frac{3}{2}\right) \\ y = 1 + 7\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = 7 - 15 \\ y = 1 + \frac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = -8 \\ y = \frac{23}{2} \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$F\left(-8; \frac{23}{2}; 0\right)$$