

Exercice 1 [5 pts]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 4n + (-1)^n$: déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 [5 pts]

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $17^n - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 3 [10 pts]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 120$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,8 u_n + 4$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 20.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -0,2 u_n + 4$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Justifier que la suite (u_n) converge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 20$.
 - a. Déterminer v_0 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
 - c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
6. BONUS [0,5 pt]

On note ℓ la limite de la suite (u_n) précédemment déterminée.
À l'aide de la calculatrice donner sans justification le plus petit entier naturel n_0 tel que $|u_{n_0} - \ell| < 0,01$ puis justifier que :
« pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| < 0,01$ ».

Corrigé

Exercice 1 [5 points]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 4n + (-1)^n$: déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Utilisation de la calculatrice

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP		
Graph1 Graph2 Graph3			APP SUR + POUR ΔTb1		
$Y_1 = X^2 - 4X + (-1)^X$			X	Y1	
$Y_2 =$			0	1	
$Y_3 =$			15	164	
$Y_4 =$			30	781	
$Y_5 =$			45	1844	
$Y_6 =$			60	3361	
$Y_7 =$			75	5324	
$Y_8 =$			90	7741	
			105	10604	
			120	13921	
			135	17684	
			150	21901	
			X=0		

On peut raisonnablement penser que $u_n \rightarrow +\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc, en ajoutant $n^2 - 4n$ à chaque membre :

$$-1 + n^2 - 4n \leq (-1)^n + n^2 - 4n \leq 1 + n^2 - 4n$$

Autrement dit : $n^2 - 4n - 1 \leq u_n \leq n^2 - 4n + 1$, en particulier que : $n^2 - 4n - 1 \leq u_n$.

Pour $n \neq 0$, on a :

$$n^2 - 4n - 1 = n^2 \left(1 - \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$$

donc on obtient :

$$n^2 \left(1 - \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \leq u_n$$

On a d'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 1$
et d'autre part on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

Par limite d'un produit on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n^2 \left(1 - \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right] = +\infty$.

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n - 1) = +\infty$.

Résumons : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - 4n - 1 \leq u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n - 1) = +\infty$ donc par application du théorème de comparaison on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2 [5 points]

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $17^n - 1$ est un multiple de 8.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n : « $17^n - 1$ est un multiple de 8 ».

• initialisation

Vérifions que P_0 : « $17^0 - 1$ est un multiple de 8 » est vraie.

On a : $17^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 8$ donc $17^0 - 1$ est un multiple de 8 par conséquent P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $17^k - 1$ est un multiple de 8 » est vraie (hypothèse de récurrence).

Démontrons que P_{k+1} : « $17^{k+1} - 1$ est un multiple de 8 » est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $17^k - 1$ est un multiple de 8 donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que : $17^k - 1 = 8q$ autrement dit tel que : $17^k = 8q + 1$. On a :

$$17^{k+1} - 1 = 17 \times 17^k - 1 = 17 \times (8q + 1) - 1 = 17 \times 8q + 17 - 1 = 17 \times 8q + 16 = 8(17q + 2)$$

En posant $q' = 17q + 2$, on a : $q' \in \mathbb{Z}$ et $17^{k+1} - 1 = 8q'$ donc : $17^{k+1} - 1$ est un multiple de 8, donc P_{k+1} est vraie. On pourrait montrer en fait que $q \in \mathbb{N}$ et $q' \in \mathbb{N}$ mais cela ne présente ici aucun intérêt.

Résumons : $\forall k \in \mathbb{N}$, si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie.

Conclusion

On déduit des deux points précédents et du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit que : $\forall n \in \mathbb{N}, 17^n - 1$ est divisible par 8.

Exercice 3

$u_0 = 120$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,8 u_n + 4$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 20.

Rappel : la suite (u_n) est minorée par la constante m , on dit aussi que la constante m est un minorant de la suite (u_n) lorsque tous les termes de la suite sont supérieur ou égaux à m : pour tout n entier naturel, $u_n \geq m$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $u_n \geq 20$ ».

• initialisation

Montrons que P_0 : « $u_0 \geq 20$ » est vraie.

On a : $u_0 = 120$ et $120 \geq 20$ donc $u_0 \geq 20$ autrement dit P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $u_k \geq 20$ » est vraie (hypothèse de récurrence).

Démontrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} \geq 20$ » est vraie.

On a : $u_k \geq 20$ (hypothèse de récurrence) et $0,8 > 0$ donc $0,8 \times u_k \geq 0,8 \times 20$ autrement dit : $0,8u_k \geq 16$ puis en ajoutant 4 à chaque membre : $0,8u_k + 4 \geq 16 + 4$, c'est-à-dire : $u_{k+1} \geq 20$ donc P_{k+1} est vraie.

Résumons : $\forall k \in \mathbb{N}$, si P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie.

• conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition P_n est vraie autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 20$, autrement dit la suite (u_n) est minorée par 20.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -0,2 u_n + 4$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 0,8u_n + 4 - u_n = 0,8u_n - 1u_n + 4 = -0,2u_n + 4$$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -0,2u_n + 4$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,2u_n + 4$, or la suite (u_n) est minorée par 20 donc $u_n \geq 20$, en multipliant par $(-0,2) < 0$ on obtient : $(-0,2) \times u_n \leq (-0,2) \times 20$ c'est-à-dire : $-0,2u_n \leq -4$, puis en ajoutant 4 à chaque membre : $-0,2u_n + 4 \leq -4 + 4$ autrement dit : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.

(u_n) est minorée par 20 et est convergente donc sa limite est supérieure ou égale à 20 : rien ne permet, pour l'instant, d'affirmer que cette dernière est « égale à 20 ».

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 20$.

a. Déterminer v_0 .

$$v_0 = u_0 - 20 = 120 - 20 = 100$$

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0,8u_n + 4 - 20 = 0,8u_n - 16 = 0,8 \left(u_n - \frac{16}{0,8} \right) = 0,8(u_n - 20) = 0,8v_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,8 \times v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 0,8.

c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0,8^n$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 20$, autrement dit : $u_n = v_n + 20$, donc $u_n = 100 \times 0,8^n + 20$.

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 100 \times 0,8^n$ et $u_n = 100 \times 0,8^n + 20$.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

On a : $-1 < 0,8 < 1$, or si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$,

puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (100 \times 0,8^n) = 0$ par limite d'une somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (100 \times 0,8^n + 20) = 20$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$.

6. [BONUS]

À l'aide de la calculatrice donner sans justification le premier entier naturel n_0 tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| < 0,01$ où ℓ est la limite de la suite (u_n) précédemment déterminée.

La contrainte s'écrit $|u_n - 20| < 0,01$ or $u_n - 20 \geq 0$ donc cette contrainte s'écrit $u_n - 20 < 0,01$ ou encore de manière équivalente : $u_n < 20,01$.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP					
DEUXIÈME CONDITION SI NÉCESSAIRE					
Graph1	Graph2	Graph3			
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)	SUITE(n+2)			
nMin=0					
■ %u(n+1) = 0.8*u(n)+4					
u(0) = 120					
u(1) =					
■ %v(n+1) =					
v(0) =					
v(1) =					
■ %w(n+1) =					
n=42					

n	u				
32	20.079				
33	20.063				
34	20.051				
35	20.041				
36	20.032				
37	20.026				
38	20.021				
39	20.017				
40	20.013				
41	20.011				
42	20.009				

À l'aide de la calculatrice : $n_0 = 42$.

Si $n \geq n_0$, comme la suite (u_n) est décroissante on en déduit $u_n \leq u_{n_0}$.

On a : $u_n \leq u_{n_0}$ et $u_{n_0} < 20,01$ donc $u_n < 20,01$ autrement dit : $u_n - 20 < 0,01$ et comme $u_n - 20 \geq 0$ l'inégalité : $u_n - 20 < 0,01$ s'écrit aussi : $|u_n - 20| < 0,01$.

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - 20| < 0,01$.