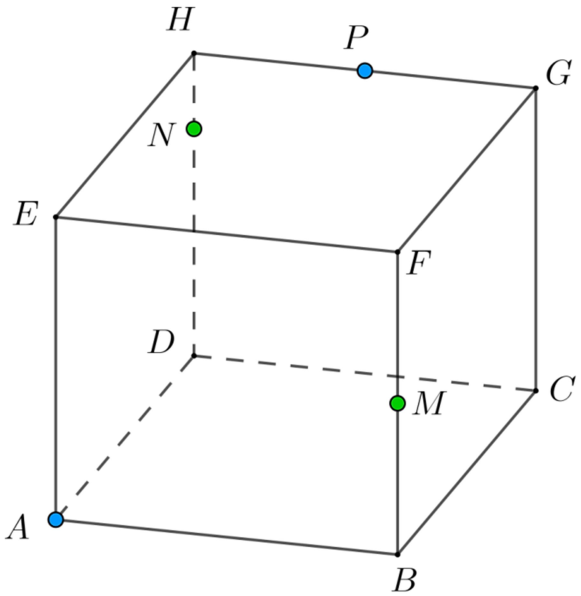
DM 02 TSpé maths **Thiaude P.**

<u>Problème</u>

Une unité de distance est choisie, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, on note M le milieu de $[BF]$, P le milieu de $[GH]$ et N le point vérifiant $\overrightarrow{DN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$:



On complètera soigneusement la figure en perspective cavalière.

On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, D, F, G, H.

2. Déterminer les coordonnées de M, N et P.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AP) et une représenttaion paramétrique de la droite (MN).

4. Montrer que les droites (AP) et (MN) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

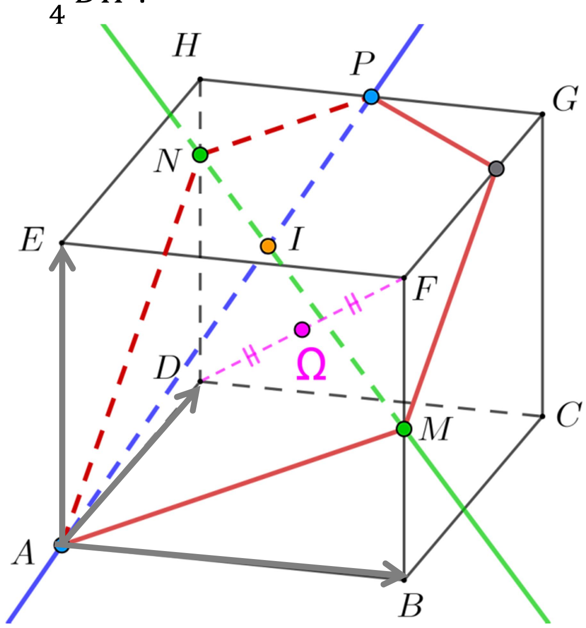
5. Les droite sécantes (AP) et (MN) définissent un plan $\mathcal{P}$.

   a. Tracer sans justification la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan $\mathcal{P}$.

   b. On appelle Ω le centre du cube $ABCDEFGH$ c'est-à-dire le milieu commun des diagonales de ce cube : le point Ω appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

Corrigé

$ABCDEFGH$ cube d'arête de longueur 1, M milieu de $[BF]$, P milieu de $[GH]$,
N point vérifiant $\overrightarrow{DN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$:



On munit l'espace du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points A,B, D, F, G, H.

$\boldsymbol{A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), F(1;0;1), G(1;1;1), H(0;1;1)}$

2. Déterminer les coordonnées de M, N et P.

M est le milieu de $[BF]$ donc :

$$x_M=\frac{x_B+x_F}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$
$$y_M=\frac{y_B+y_F}{2}=\frac{0+0}{2}=\frac{0}{2}=0$$
$$z_M=\frac{z_B+z_F}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

De même, P étant le milieu de $[GH]$:

$$x_P=\frac{x_G+x_H}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$
$$y_P=\frac{y_G+y_H}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$
$$z_P=\frac{z_G+z_H}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

On a, par définition de N : $\overrightarrow{DN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$.

Or, $\overrightarrow{DH}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_H-x_D\\y_H-y_D\\z_H-z_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-0\\1-1\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{DN}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_N-x_D\\y_N-y_D\\z_N-z_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_N-0\\y_N-1\\z_N-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_N\\y_N-1\\z_N\end{pmatrix}$$

Donc : $\begin{cases} x_N = \frac{3}{4}(0) \\ y_N - 1 = \frac{3}{4}(0) \\ z_N = \frac{3}{4}(1) \end{cases}$, autrement dit : $\begin{cases} x_N = 0 \\ y_N = 1 \\ z_N = \frac{3}{4} \end{cases}$

Résumons :

$$\boldsymbol{M\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right), N\left(0\,;1\,;\frac{3}{4}\right)} \ \textbf{ et } \ \boldsymbol{P\left(\frac{1}{2};1\,;1\right)}$$

3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AP) et une représenttaion paramétrique de la droite (MN).

• représentation paramétrique de (AP)

$\overrightarrow{AP}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \\ z_P - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AP) et $A(0; 0; 0) \in (AP)$ donc :

$$\boldsymbol{(AP)} : \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{2}t} \\ \boldsymbol{y = t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases} \quad \boldsymbol{(t \in \mathbb{R})}$$

• représentation paramétrique de (MN)

$\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{3}{4} - \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (MN) et $M(1; 0; \frac{1}{2}) \in (MN)$ donc :

$$\boldsymbol{(MN)} : \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - k} \\ \boldsymbol{y = k} \\ \boldsymbol{z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}k} \end{cases} \quad \boldsymbol{(k \in \mathbb{R})}$$

En utilisant $N \in (MN)$ on obtient :

$$(MN) : \begin{cases} x = -k \\ y = 1 + k \\ z = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

4. Montrer que les droites (AP) et (MN) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

En utilisant les représentation paramétriques des droites (AP) et (MN), il s'agit de montrer qu'il existe un et un seul couple de réels (α, β) vérifiant le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t = 1 - k \\ t = k \\ t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}k \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t = 1 - k \\ t = k \\ t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}t = 1 - t \\ t = k \\ t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}t = 1 \\ t = k \\ \frac{3}{4}t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = k \\ t = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = k \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Il existe un et un seul tel couple (t, k) donc les droites (AP) et (MN) sont sécantes.

Faisons $t = \frac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de (AP) obtenue précédemment :

$$x = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$y = t = \frac{2}{3}$$
$$z = t = \frac{2}{3}$$

Donc les droites (AP) et (MN) sont sécantes en :

$$\boldsymbol{I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)}$$

On peut vérifier en faisant $k = \frac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de (MN) obtenue précédemment :

$$x = 1 - k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \qquad y = k = \frac{2}{3}$$
$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

5. Les droite sécantes (AP) et (MN) définissent un plan $\mathcal{P}$.

a. Tracer sans justification la section du cube par le plan $\mathcal{P}$.

(voir figure)

b. On appelle Ω le centre du cube c'est-à-dire le milieu commun des diagonales du cube : le point Ω appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

Ω est le milieu commun de chacune des diagonales, en particulier de $[DF]$, donc :

$$x_\Omega = \frac{x_D + x_F}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$y_\Omega = \frac{y_D + y_F}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$
$$z_\Omega = \frac{z_D + z_F}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dire que Ω appartient au plan $\mathcal{P}$ revient à dire que $\overrightarrow{IP}$, $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{I\Omega}$ sont coplanaires, ou encore que $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{I\Omega}$ sont coplanaires. Or, on a :

$$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}, I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), \Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

donc $\overrightarrow{I\Omega}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_\Omega - x_I\\y_\Omega - y_I\\z_\Omega - z_I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\\\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\\\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{I\Omega}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls. Or, on a :

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -1\\1 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times 1 - (-1)\times 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \neq 0$$

donc $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{MN}$ ne sont pas colinéaires.

On peut aussi remarquer que (AP) et (MN) sont sécantes donc $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{MN}$ ne sont pas colinéaires.

Donc dire que $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{I\Omega}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{I\Omega} = \alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{MN}$:

$$\begin{cases}\frac{1}{6} = \frac{1}{2}\alpha - \beta\\-\frac{1}{6} = \alpha + \beta\\-\frac{1}{6} = \alpha + \frac{1}{4}\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}\alpha - \beta = \frac{1}{6}\\\alpha + \beta = -\frac{1}{6}\\\alpha + \frac{1}{4}\beta = -\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\\\alpha + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}\\\alpha + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\\\frac{3}{2}\alpha = 0\\\frac{9}{8}\alpha - \frac{1}{24} = -\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\\\alpha = 0\\-\frac{1}{24} = -\frac{1}{6}\ (faux)\end{cases}$$

Le système est impossible donc **$\boldsymbol{\Omega}$ n'appartient pas au plan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$**.