Exercice 1*

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 2u_n + 4$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $2 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n), déterminer la valeur de ℓ.

5. Un élève affirme : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + 2^{1-2^n}$ ».
Si cette affirmation est vraie alors la démontrer par récurrence, sinon en donner un contre-exemple.

Corrigé

Exercice 1

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $2^n \geqslant n^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note P_n la proposition : « $2^n \geqslant n^2$ ».
On peut définir la proposition pour tout $n \in \mathbb{N}$ même si on ne va s'intéresse à sa véracité que pour $n \geqslant 4$.

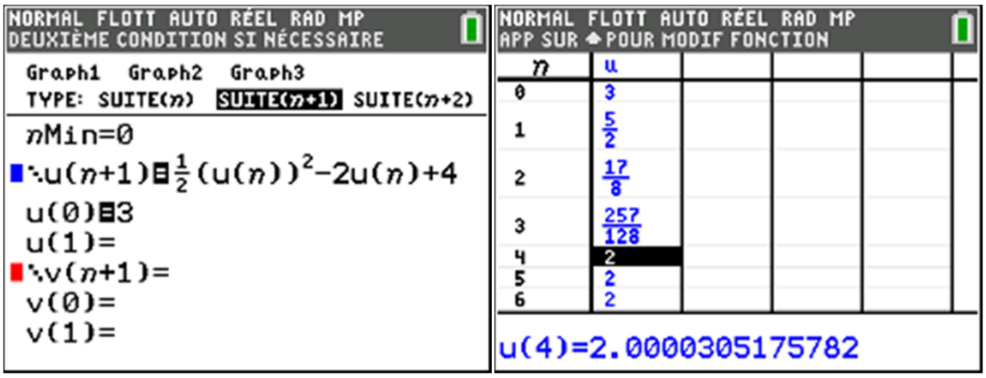
- initialisation
  On a : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, or $16 \geqslant 16$ donc P_4 est vraie.
- hérédité
  Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 4 tel que P_k : « $2^k \geqslant k^2$ » est vraie.
  Montrons que P_{k+1} : « $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$ » est vraie.
  On a : $2^k \geqslant k^2$ (H.R.) donc en multipliant par $2 > 0$: $2 \times 2^k \geqslant 2 \times k^2$, autrement dit : $2^{k+1} \geqslant 2k^2$.

  Montrons à présent que : $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
  On a :
  $$2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) = k^2 - 2k - 1 = (k)^2 - 2(k)(1) + (1)^2 - 1 - 1$$
  $$= (k-1)^2 - 2$$
  Or, $k \geqslant 4$ donc $k - 1 \geqslant 3$, d'où :
  $$(k-1)^2 \geqslant 3^2 \Leftrightarrow (k-1)^2 \geqslant 9 \Leftrightarrow (k-1)^2 - 2 \geqslant 9 - 2 \Leftrightarrow (k-1)^2 - 2 \geqslant 7 \Rightarrow (k-1)^2 - 2 \geqslant 0$$
  Donc : $2k^2 - (k+1)^2 \geqslant 0$ autrement dit : $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
  On a : $2^{k+1} \geqslant 2k^2$ et $2k^2 \geqslant (k+1)^2$, donc par transitivité $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$: P_{k+1} est vraie.

Conclusion :
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \geqslant 4$ la proposition P_n est vraie, autrement dit : **pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.**

Exercice 2

$u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 2u_n + 4$; $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 4$



1. Montrer que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 2 = x - 2$$

Pour tout $x \in [2; +\infty[$, on a $f'(x) \geqslant 0$ et f' ne s'annule que pour $x = 2$ (donc un nombre fini de fois), par conséquent f est **strictement croissante sur $[2; +\infty[$**,

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $2 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition : « $2 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$ » .

• <u>initialisation</u>

Calculons d'abord u_1 :

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0^2 - 2u_0 + 4 = \frac{1}{2}(3)^2 - 2(3) + 4 = \frac{9}{2} - 6 + 4 = \frac{5}{2}$$

On a : $2 < \frac{5}{2} \leqslant 3 \leqslant 3$, or $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{5}{2}$ donc : $2 < u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$, autrement dit P_0 est vraie.

• <u>hérédité</u>

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $2 < u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3$ » est vraie, montrons que P_{k+1}: « $2 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$ » est vraie.

On a : $2 < u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3$ (H.R.).

Les nombre 2, u_{k+1}, u_k et 3 appartiennent tous à l'intervalle $[2; +\infty[$, or f est strictement croissante sur cet intervalle donc elle conserve le sens de la relation d'ordre, même stricte, par conséquent :

$$f(2) < f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(3)$$

Or :

$$f(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 4 = \frac{1}{2} \times 4 - 4 + 4 = 2$$

$$f(u_{k+1}) = u_{k+2}$$

$$f(u_k) = u_{k+1}$$

$$f(3) = \frac{1}{2}(3)^2 - 2(3) + 4 = \frac{9}{2} - 6 + 4 = \frac{5}{2}$$

donc :

$$2 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{5}{2}$$

Or, $\frac{5}{2} \leqslant 3$, donc : $2 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{5}{2} \leqslant 3$, d'où $2 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$: P_{k+1} est vraie.

<u>Conclusion</u> :

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente :

• $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante

• $\forall n \in \mathbb{N}, 2 < u_n$, donc la suite (u_n) est minorée par la constante 2

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone **elle est convergente**.

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n), déterminer la valeur de ℓ.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n)^2 - 2u_n + 4$ $(*)$.

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} u_N = \ell$

et d'autre part, par limite d'un produit, d'une différence et d 'une somme :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}{u_n}^2 - 2u_n + 4\right) = \frac{1}{2}\ell^2 - 2\ell + 4$$

Par passage à la limite dans $(*)$, on en déduit : $\ell = \dfrac{1}{2}\ell^2 - 2\ell + 4$ puis on a les équivalences :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - 2\ell + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ell^2 - 3\ell + 4 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 2)\left(\frac{1}{2}\ell - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \ell = 2 \; ou \ell = 4$$

Or, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 3$, donc par passage à la limite : $\ell \leqslant 3$ donc $\ell = 4$ est impossible.

Par élimination on en déduit que $\boldsymbol{\ell = 2}$.

5. Un élève affirme : « $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + 2^{1-2^n}}$ ».

Si cette affirmation est vraie alors la démontrer par récurrence, sinon en donner un contre-exemple.

En testant cette affirmation pour $n = 0$ et $n = 1$: elle semble être vraie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $u_n = 2 + 2^{1-2^n}$ ».

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie.

• <u>initialisation</u>

D'une part, on sait que $u_0 = 3$, et d'autre part : $2 + 2^{1-2^0} = 2 + 2^{1-1} = 2 + 2^0 = 2 + 1 = 3$,

donc : $u_0 = 2 + 2^{1-2^0}$, autrement dit P_0 est vraie.

• <u>hérédité</u>

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $u_k = 2 + 2^{1-2^k}$» est vraie, montrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} = 2 + 2^{1-2^{k+1}}$» est vraie.

On a : $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k^2 - 2u_n + 4$, or par hypothèse de récurrence : $u_k = 2 + 2^{1-2^k}$, donc :

$$\begin{aligned}
&u_{k+1}\\
&= \frac{1}{2}\left(2 + 2^{1-2^k}\right)^2 - 2\left(2 + 2^{1-2^k}\right) + 4\\
&= \frac{1}{2}\left(2^2 + 2 \times 2 \times 2^{1-2^k} + 2^{2(1-2^k)}\right) - 4 - 2^1 2^{1-2^k} + 4\\
&= \frac{1}{2}\left(4 + 2 \times 2^{1+1-2^k} + 2^{2-2^{k+1}}\right) - 4 - 2^{1+1-2^k} + 4\\
&= 2 + 2^{2-2^k} + 2^{1-2^{k+1}} - 2^{2-2^k}\\
&= 2 + 2^{1-2^{k+1}}
\end{aligned}$$

On a : $u_{k+1} = 2 + 2^{1-2^{k+1}}$, autrement dit P_{k+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit que : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + 2^{1-2^n}}$.