

Exercice.1 [9 points]

Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$ pour chacune des fonctions f suivantes, ne rédiger en détail que la réponse à la question 1. :

1. $f(x) = xe^{x^2-1}$ 2. $f(x) = \frac{7x^3}{x^4 + 3}$ 3. $f(x) = e^{-x}(e^{-x} + 2)^4$

Exercice.2 [8 points]

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -y + (2x - 1)e^x$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, on note (E_0) l'équation homogène associée : $y' = -y$.

1. Donner la solution générale de (E_0) .
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $g: x \mapsto (x + b)e^x$ où b est une constante réelle.
3. Déterminer la solution générale de (E) .
4. On admet qu'il existe une solution h de (E) telle que la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère : déterminer $h(1)$.

Exercice.3 [3 points]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 4e^x}{e^x + 1}$$

1. Déterminer deux constantes réelles a et b telles que, pour tout réel x :

$$f(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x + 1}$$

2. Sans rédaction, donner les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive F_0 de f sur $\mathbb{R}$ telle que : $F_0(\ln(2)) = 0$.

Corrigé

Exercice.1

1. $f(x) = xe^{x^2-1}$

On pose $u(x) = x^2 - 1$, d'où $u'(x) = 2x$, on a pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2} \times \underbrace{2xe^{x^2-1}}_{u'e^u}$,

c'est-à-dire : $f(x) = \frac{1}{2} u'(x)e^{u(x)}$, or les primitives de $u'e^u$ sont les fonctions $e^u + k$

donc en notant F une primitive de f sur $\mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} e^{u(x)} + k$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2-1} + k}$$

où k est une constante réelle.

2. $f(x) = \frac{7x^3}{x^4 + 3}$

On donne ci-dessous la correction détaillée, non demandée.

On pose $u(x) = x^4 + 3$, d'où $u'(x) = 4x^3$, on a pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{7}{4} \times \underbrace{\frac{4x^3}{x^4+3}}_{\frac{u'}{u}}$

c'est-à-dire : $f(x) = \frac{7}{4} \frac{u'(x)}{u(x)}$, or les primitives de $\frac{u'}{u}$ lorsque $u > 0$ sur l'intervalle considéré sont les fonctions $\ln(u) + k$ donc en notant F une primitive de f sur $\mathbb{R} :$

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{7}{4} \ln(u(x)) + k$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{7}{4} \ln(x^4 + 3) + k}$$

où k est une constante réelle.

3. $f(x) = e^{-x}(e^{-x} + 2)^4$

On donne ci-dessous la correction détaillée, non demandée.

On pose $u(x) = e^{-x} + 2$, d'où $u'(x) = -e^{-x}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\underbrace{e^{-x}(e^{-x} + 2)^4}_{u'u^4}$

c'est-à-dire : $f(x) = -u'u^4$, or les primitives de $u'u^4$ sont les fonctions $\frac{u^5}{5} + k$ donc en notant F une primitive de f sur $\mathbb{R} :$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{(u(x))^5}{5} + k$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{1}{5} (e^{-x} + 2)^5 + k}$$

où k est une constante réelle.

Exercice.2

1. Solution générale de (E_0) : $y' = -y$

L'équation différentielle $y' = -y$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$, dont la solution générale est $x \mapsto Ce^{ax}$, donc la **solution générale de (E_0) est** :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{-x}}$$

où C est une constante réelle.

2. Une solution particulière de (E) de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x + b)e^x$

Dire que g est une solution de (E) signifie : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -g(x) + (2x - 1)e^x$ (*)

Calculons $g'(x)$:

$$g(x) = (x + b)e^x$$

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^x)' = e^x$

$$g'(x) = 1e^x + e^x \times (x + b)$$

$$g'(x) = (x + b + 1)e^x$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} -g(x) + (2x - 1)e^x &= -(x + b)e^x + (2x - 1)e^x = (-x - b + 2x - 1)e^x \\ &= (x - b - 1)e^x \end{aligned}$$

L'égalité (*) s'écrit donc : $(x + b + 1)e^x = (x - b - 1)e^x$ puis en divisant par e^x qui est toujours non nul : $x + b + 1 = x - b - 1$.

Par identification on obtient : $b + 1 = -b - 1$, qui donne : $2b = -2$, puis : $b = -1$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x - 1)e^x}$$

3. Solution générale de (E)

La solution générale de (E) est somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E) (cours) donc elle s'écrit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{-x} + (x - 1)e^x}$$

où C est une constante réelle.

4. h est une solution h de (E) , la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère, détermination de $h(1)$

La tangente T au point d'abscisse 1 admet pour équation : $y = h'(1)(x - 1) + h(1)$, c'est-à-dire : $y = h'(1)x - h'(1) + h(1)$, donc elle admet pour ordonnée à l'origine : $-h'(1) + h(1)$, or T passe par l'origine du repère donc : $-h'(1) + h(1) = 0$ (*).

h étant une solution de (E) on a : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = -h(x) + (2x - 1)e^x$, d'où :

$h'(1) = -h(1) + (2(1) - 1)e^1 = -h(1) + e$, puis en remplaçant dans (*) :

$$-(-h(1) + e) + h(1) = 0 \Leftrightarrow 2h(1) = e \Leftrightarrow h(1) = \frac{e}{2}$$

Résumons : $\boxed{h(1) = \frac{e}{2}}$

Exercice.3

1. Cherchons deux constantes a et b telles que, pour tout réel x : $f(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x+1}$.
Pour tout réel x , on a :

$$ae^x + \frac{be^x}{e^x+1} = \frac{ae^x(e^x+1)}{e^x+1} + \frac{be^x}{e^x+1} = \frac{ae^{2x} + ae^x + be^x}{e^x+1} = \frac{ae^{2x} + (a+b)e^x}{e^x+1}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 4e^x}{e^x+1}$$

$$\text{donc par identification : } \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1+b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Résumons : $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3}$.

2. On donne ci-dessous la correction détaillée, non demandée.

D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x + \frac{3e^x}{e^x+1} = e^x + 3 \times \frac{e^x}{e^x+1}$$

On a : $(e^x)' = e^x$ et $(\ln(e^x+1))' = \frac{e^x}{e^x+1}$, donc en notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^x + 3 \ln(e^x+1) + k}$$

où k est une constante réelle.

3. Primitive F_0 de f telle que : $F_0(\ln(2)) = 0$

F_0 est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc d'après 2. il existe une constante k telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_0(x) = e^x + 3 \ln(e^x+1) + k$$

Or, $F_0(\ln(2)) = 0$, donc :

$$e^{\ln(2)} + 3 \ln(e^{\ln(2)}+1) + k = 0 \Leftrightarrow 2 + 3 \ln(2+1) + k = 0 \Leftrightarrow k = -2 - 3 \ln(3)$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_0(x) = e^x + 3 \ln(e^x+1) - 2 - 3 \ln(3)}$$