

Exercice.1 [5 points]

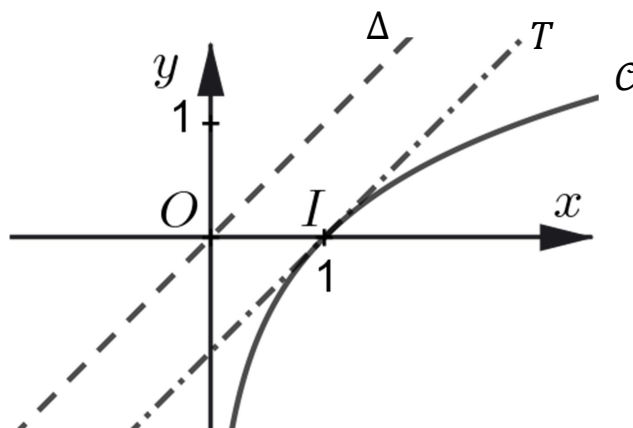
Résoudre l'équation : $\ln(x) + \ln(x - 8) = \ln(5x - 12)$.

Exercice 2 [4 points]

Résoudre l'inéquation : $\ln(x - 5) \leq \ln(-x + 7)$.

Problème [11 points]

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} =]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan, Δ la droite d'équation $y = x$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse 1 :

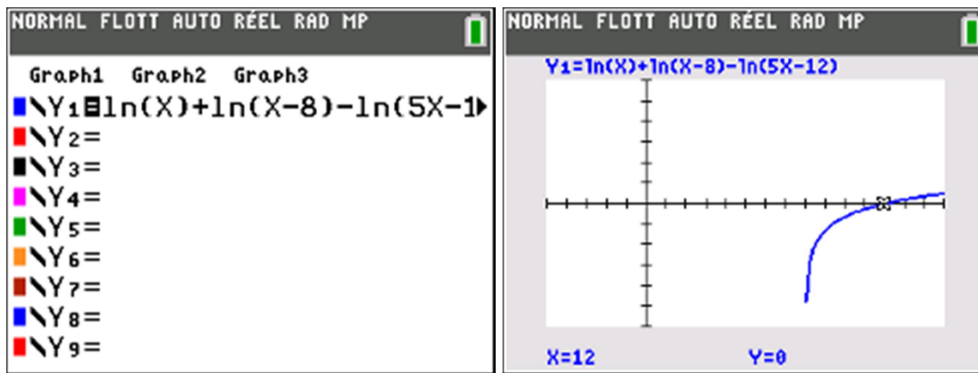


1.
 - a. Démontrer que f est concave sur $\mathcal{D}$.
 - b. Déterminer une équation de la tangente T .
 - c. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T .
 - d. En déduire la position relative de Δ et $\mathcal{C}$.
2. Soit u la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $u(x) = x^2 + \ln(x)$.
 - a. Déterminer les limites de u en 0^+ et en $+\infty$.
 - b. Etudier le sens de variation de u sur $\mathcal{D}$.
 - c. Montrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in \mathcal{D}$ tel que $u(\alpha) = 0$, justifier que $\ln(\alpha) = -\alpha^2$.
 - d. Etudier le signe de $u(x)$ en distinguant les cas : $0 < x < \alpha$ et $x > \alpha$ puis dresser le tableau de signes de $u(x)$.
 - e. À l'aide de la calculatrice justifier que $0,5 < \alpha < 1$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
3. Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $g(x) = x^2 + (\ln(x))^2$.
 - a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $g'(x) = \frac{2}{x} u(x)$.
 - b. En déduire les variations de g sur $\mathcal{D}$.
4. Montrer que la valeur de la plus courte distance entre l'origine O du repère et un point M de $(\mathcal{C})$ est $\sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}$.
On admettra que rendre la distance OM minimale revient à rendre OM^2 minimal.
5. On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α : démontrer que la tangente à $\mathcal{C}$ en A est perpendiculaire à la droite (OA) .

Corrigé

Exercice 1

$$\ln(x) + \ln(x - 8) = \ln(5x - 12)$$



- domaine

Il faut que $x > 0$, $x - 8 > 0$ et $5x - 12 > 0$, on a les équivalences :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 8 > 0 \\ 5x - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \\ x > \frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \\ x > 2,4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8$$

Le domaine de l'équation est donc : $\mathcal{D} =]8; +\infty[$.

- résolution

Pour $x \in \mathcal{D}$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \ln(x) + \ln(x - 8) &= \ln(5x - 12) \Leftrightarrow \ln(x(x - 8)) = \ln(5x - 12) \Leftrightarrow x(x - 8) = 5x - 12 \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x &= 5x - 12 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 5x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 12) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \text{ ou } x = 12 \end{aligned}$$

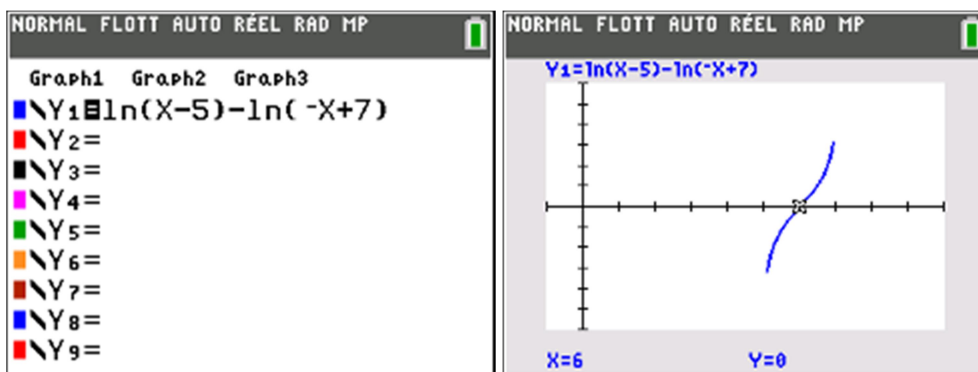
Les candidats solutions sont : 1 et 12.

- conclusion

$1 \notin \mathcal{D} =]8; +\infty[$ donc est rejeté, $12 \in \mathcal{D} =]8; +\infty[$ donc est accepté, conclusion : $\mathcal{S} = \{12\}$.

Exercice 2

$$\ln(x - 5) \leq \ln(-x + 7)$$



- domaine

Il faut que $x - 5 > 0$ et $-x + 7 > 0$, on a les équivalences :

$$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ -x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ -x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x < 7$$

Le domaine de l'inéquation est donc : $\mathcal{D} =]5; 7[$.

• résolution

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a les équivalences :

$$\ln(x - 5) \leq \ln(-x + 7) \Leftrightarrow x - 5 \leq -x + 7 \Leftrightarrow x + x \leq 7 + 5 \Leftrightarrow 2x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 6$$

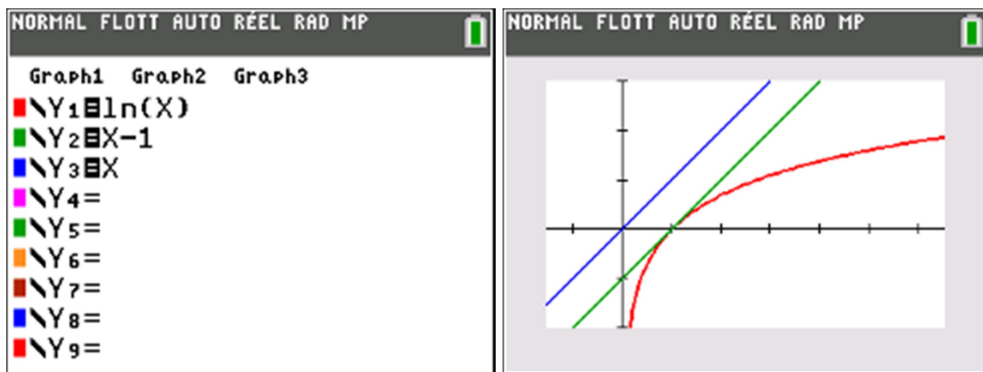
Les candidats solutions sont les nombres de l'intervalle : $] -\infty; 6]$.

• conclusion

L'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'intervalle des candidats solutions est : $5 < x \leq 6$, donc : $\mathcal{S} =]5; 6]$.

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} =]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$, $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan, $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.



1. a. **Démontrer que f est concave sur $]0; +\infty[$**

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f''(x)$ est celui de son numérateur : -1 , on en déduit que : $\forall x \in \mathcal{D}, f''(x) < 0$ donc **f est concave sur $\mathcal{D}$** .

b. **Déterminer une équation de la tangente T .**

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 admet pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

Or, $f(1) = \ln(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$, on obtient : $y = 1(x - 1) + 0$, autrement dit : $y = x - 1$.

La tangente T admet pour équation $y = x - 1$.

c. **Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T .**

f est concave sur $\mathcal{D}$ donc $\mathcal{C}$ est située en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, en particulier : **$\mathcal{C}$ est située en dessous de T sur $\mathcal{D}$.**

Autre méthode

$\forall x > 0, g(x) = x - 1 - \ln(x)$. Le signe de $g(x)$ indique la position relative de T et $\mathcal{C}$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de son numérateur $x - 1$.

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Règle : $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
sens de variation de g			

$$g(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0 - 0 = 0$$

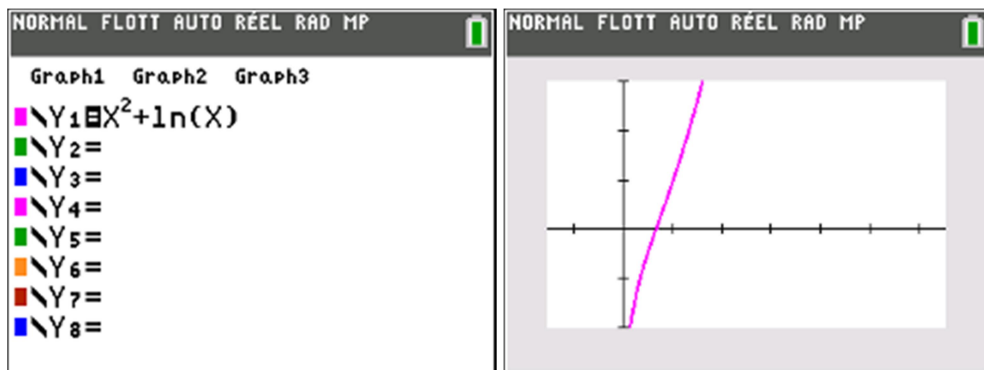
Le tableau de variation de g montre que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

T est toujours située au-dessus (sens large) de C , T et C ont pour unique point commun $I(1; 0)$.

d. En déduire la position relative de Δ et C .

$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq x - 1 < x$, donc : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) < x$, par conséquent C est située strictement en dessous de $\Delta : y = x$.

2. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^2 + \ln(x)$.



a. Déterminer les limites de u en 0^+ et en $+\infty$.

$$u(x) = x^2 + \ln(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ (cours) donc par limite d'une somme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ (cours) donc par limite d'une somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

b. Sens de variation de u sur $\mathcal{D}$

$$u(x) = x^2 + \ln(x)$$

$$\text{Rappel : } (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $x > 0$, donc $2x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$, donc $2x + \frac{1}{x} > 0$, $u'(x) > 0$

$\forall x > 0, u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $\mathcal{D}$.

c. Montrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in \mathcal{D}$ tel que $u(\alpha) = 0$, justifier que $\ln(\alpha) = -\alpha^2$.

• u est continue strictement monotone sur $\mathcal{D} =]0; +\infty[$ et 0 appartient à l'intervalle de bornes

$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs

intermédiaires il existe un unique $\alpha \in \mathcal{D}$ tel que $u(\alpha) = 0$.

• par définition de α on a : $u(\alpha) = 0$, or $u(x) = x^2 + \ln(x)$, donc : $\alpha^2 + \ln(\alpha) = 0$, autrement dit : $\ln(\alpha) = -\alpha^2$.

d. signe de $u(x)$ en distinguant les cas : $0 < x < \alpha$ et $x > \alpha$ puis tableau de signes de $u(x)$

Soit $x \in \mathcal{D} =]0; +\infty[$:

• si $0 < x < \alpha$:

x et α appartiennent à l'intervalle $\mathcal{D}$ sur lequel u est strictement croissante donc conserve le sens de la relation, par conséquent : $u(x) < u(\alpha)$, autrement dit : $u(x) < 0$

• si $x > \alpha$:

x et α appartiennent à l'intervalle $\mathcal{D}$ sur lequel u est strictement croissante donc conserve le sens de la relation, par conséquent : $u(x) > u(\alpha)$, autrement dit : $u(x) > 0$

x	0	α	$+\infty$
Signe de $u(x)$	-	0	+

e. Justifier que $0,5 < \alpha < 1$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

$$u(0,5) \approx -0,4 < 0 \text{ et } u(1) = 1 > 0 \text{ donc } 0,5 < \alpha < 1$$

$$u(0,6) \approx -0,151 < 0 \text{ et } u(0,7) \approx 0,13 > 0 \text{ donc } 0,6 < \alpha < 0,7$$

$$u(0,65) \approx -0,008 < 0 \text{ et } u(0,66) \approx 0,201 > 0 \text{ donc : } 0,65 < \alpha < 0,66.$$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $g(x) = x^2 + (\ln(x))^2$.

a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathcal{D}$ $g'(x) = \frac{2}{x} u(x)$.

$$\text{Rappelons que, } \forall x \in \mathcal{D}, u(x) = x^2 + \ln(x).$$

$$g(x) = x^2 + (\ln(x))^2$$

$$\text{Rappels : } (u^2)' = 2u \times u' \text{ (avec les notations du cours) et } (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 2x + 2 \ln(x) \times \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 2x^2 \times \frac{1}{x} + 2 \ln(x) \times \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2}{x} (x^2 + \ln(x))$$

$$\text{Or, } u(x) = x^2 + \ln(x), \text{ donc : } \forall x \in \mathcal{D}, g'(x) = \frac{2}{x} u(x).$$

b. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathcal{D}$.

$$\text{On a montré en a. que, pour tout } x \in \mathcal{D}, g'(x) = \frac{2}{x} u(x).$$

Or pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\frac{2}{x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $u(x)$, puis en utilisant 2.d. :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
Sens de variation de g			

4. Montrer que la valeur de la plus courte distance entre l'origine O du repère et un point M de $\mathcal{C}$ est $\sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}$. On admettra que rendre la distance OM minimale revient à rendre OM^2 minimal.

Remarquons d'abord que : $g(\alpha) = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$, or $u(\alpha) = 0$ donne $\alpha^2 + \ln(\alpha) = 0$ autrement dit : $\ln(\alpha) = -\alpha^2$, d'où : $g(\alpha) = \alpha^2 + (-\alpha^2)^2 = \alpha^2 + \alpha^4$.

Soit $M(x; \ln(x)) \in \mathcal{C}$, dans un repère orthonormé donc on peut utiliser la formule de la distance :

$$OM = \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (\ln(x) - 0)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln(x))^2},$$

$$\text{donc } OM^2 = \left(\sqrt{x^2 + (\ln(x))^2} \right)^2 = x^2 + (\ln(x))^2 = g(x).$$

Rendre minimal OM^2 c'est rendre minimal $g(x)$: le tableau de variation de g montre que le minimum de $g(x)$ sur $\mathcal{D}$ est $g(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4$, atteint pour $x = \alpha$ (uniquement).

Le minimum de OM^2 est $\alpha^2 + \alpha^4$ donc celui de OM est $\sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}$.

Résumons : la plus courte distance OM , $M \in \mathcal{C}$ est $\sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}$.

5. A point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α : démontrer que la tangente à $\mathcal{C}$ en A est perpendiculaire à la droite (OA) .

$\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} \alpha \\ \ln(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T_A .

Le repère est orthonormé donc on peut utiliser l'expression du produit scalaire dans un tel repère :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = x_{\overrightarrow{OA}} \times x_{\vec{u}} + y_{\overrightarrow{OA}} \times y_{\vec{u}} = \alpha \times 1 + (-\alpha^2) \times \frac{1}{\alpha} = \alpha - \alpha = 0$$

On constate que $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = 0$ donc $\overrightarrow{OA} \perp \vec{u}$ autrement dit : $(OA) \perp T_A$.