CS 04 TSpé maths **Mardi 2 décembre 2025** **Thiaude P.**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 30 min**

<u>Exercice.1</u> [6 points]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 5\sin(x)}{x^2 + 1}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction f puis interpréter graphiquement.

<u>Exercice.2</u> [10 points]
Calculer chacune des limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-3x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{x^2-5}{e^{x-2}-1}$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{x^2-5}{e^{x-2}-1}$

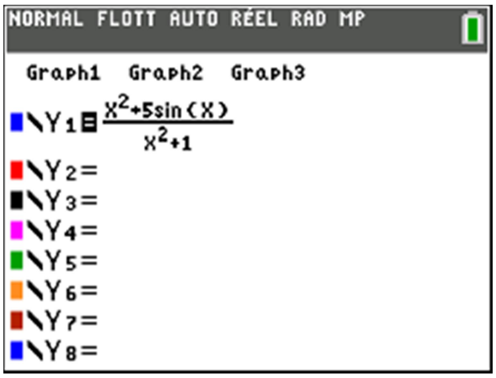
<u>Exercice.3</u> [4 points]
Soient a et b deux constantes, déterminer en fonction de a :

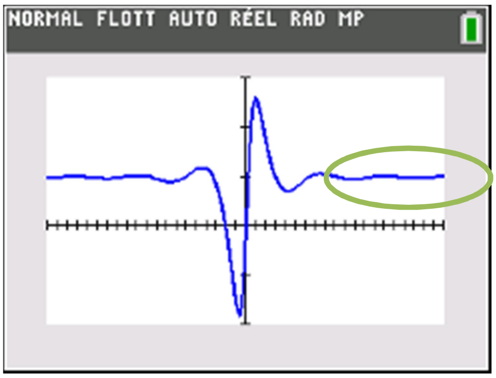
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+b}\right)$$

Corrigé

Exercice.1

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{5}\sin(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1}}$, limite lorsque x tend vers $+\infty$, interpréter graphiquement





Soit $x \neq 0$, on a : $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

puis en multipliant chaque membre pat 5 avec $5 > 0$: $-5 \leqslant 5\sin(x) \leqslant 5$

puis en ajoutant x^2 à chaque membre : $-5 + x^2 \leqslant 5\sin(x) + x^2 \leqslant 5 + x^2$

autrement dit : $x^2 - 5 \leqslant x^2 + 5\sin(x) \leqslant x^2 + 5$

puis en divisant par $x^2 + 1$ avec $x^2 + 1 > 0$:

$$\frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} \leqslant \frac{x^2 + 5\sin(x)}{x^2 + 1} \leqslant \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x^2\left(1 - \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\frac{1 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Or,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$$

donc par limite d'une différence, d'un quotient et d'une somme :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

Résumons :

$$\begin{cases} \forall x \neq 0, \dfrac{1 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \end{cases}$$

donc d'après le <u>théorème des gendarmes</u> on en déduit que : $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to +\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$.

La droite d'équation $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$ est une **asymptote horizontale à $\boldsymbol{C}$ au voisinage de** $+\infty$.

Exercice.2

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+3}}{x^2}$

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{e^{x+3}}{x^2} = \frac{e^x e^3}{x^2} = e^3 \times \frac{e^x}{x^2}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ (croissances comparées) et $e^3 > 0$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^3 \times \frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty$.

Conclusion :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{x^2} = +\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-3x}$

On pose $X = -3x$, d'où $x = -\frac{X}{3}$; $x \to +\infty$ implique $X \to -\infty$; on a :

$$x^4 e^{-3x} = \left(-\frac{X}{3}\right)^4 e^{-3\left(-\frac{X}{3}\right)} = +\frac{X^4}{3^4}\, e^X = \frac{X^4}{81} e^X = \frac{1}{81} X^4 e^X$$

Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} X^4 e^X = 0$ (croissances comparées) donc :

$$\lim_{X\to-\infty}\left(\frac{1}{81}\, X^4 e^X\right) = 0$$

Conclusion :

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-3x} = 0$$

3. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-5}{e^{x-2}-1}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-5}{e^{x-2}-1}$

Cherchons pour quelles valeurs de x on a $e^{x-2} - 1 > 0$:

$$e^{x-2} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-2} > 1 \Leftrightarrow e^{x-2} > e^0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\dfrac{x^2-5}{e^{x-2}-1}$	$-$	0	$+$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-5) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 2^-}(e^{x-2}-1) = 0^-$, donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5}{e^{x-2}-1} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-5) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}(e^{x-2}-1) = 0^+$, donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5}{e^{x-2}-1} = -\infty$$

Exercice.3

Soient a et b deux constantes, déterminer en fonction de a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+b}\right)$.

Pour tout $x>0$ tel que les expressions écrites existent on a :

$$\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+b}=\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+b}\right)\left(\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+b}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+b}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+b}\right)^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{b}{x^2}\right)}}=\frac{x^2+ax+b-(x^2+b)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{b}{x^2}}}$$

$$=\frac{ax}{|x|\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{b}{x^2}}}=\frac{xa}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{x^2}}\right)}=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{x^2}}}$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x^2}=0$ (cours), donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{b}{x^2}\right)=1$$

Puis :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}=\lim_{X\to1}\sqrt{X}=1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{b}{x^2}}=\lim_{Y\to1}\sqrt{Y}=1$$

puis par limite d'une somme et d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{x^2}}}=\frac{a}{2}$$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+b}\right)=\frac{a}{2}$.