CS 03 TSpé maths **Jeudi 13 novembre 2025** **Thiaude P.**

Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 1h**

<u>Exercice.1</u> [7 points]

Dans un repère de l'espace, $\mathcal{D}$ est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

avec $t \in \mathbb{R}$ et Δ est la droite passant par $E(5; 8; 3)$ et $F(6; 11; 5)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

2. Montrer que $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes, préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

3. Le point $G(9; 18; 5)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$ défini par les droites $\mathcal{D}$ et Δ ?

<u>Exercice.2</u> [13 points]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 49}{u_n - 13}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Le programme Python suivant retourne le plus petit entier naturel p tel que $|u_p - 7| < 0{,}01$; on admet l'existence d'un tel entier p.

```
01 U=1
02 n=0
03 while ...
04         n=n+1
05         U=...
06 print("p=",n)
```

Recopier <u>sur la copie</u> les lignes 03 et 05 en les complétant.

2. Soit f la fonction définie sur $[1;7]$ par : $f(x) = \dfrac{x - 49}{x - 13}$.

a. Déterminer le sens de variation de f sur $[1;7]$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 7$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

3. ***Dans cette question on se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) par une autre méthode : aucune des réponses à la question 2. ne peut être utilisée.***

On considère la suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 7}$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.

c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier l'existence de l'entier p de la question **1.** et déterminer par le calcul sa valeur.

Corrigé

Exercice 1

Dans un repère de l'espace :

— $\mathcal{D}$ est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

— Δ est la droite passant par $E(5; 8; 3)$ et $F(6; 11; 5)$

1. **Donner une représentation paramétrique de Δ.**

$\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ 11-8 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De plus, $E(5; 8; 3) \in (EF)$ donc une représenttaion paramétrique de (EF) est :

$$\begin{cases} x = 5 + k \\ y = 8 + 3k \\ z = 3 + 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

2. **Montrer que $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes et préciser les coordonnées de leur point d'intersection I.**

Dire que les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes c'est dire qu'il existe un unique $(k, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} 2 + t = 5 + k \\ 1 + 2t = 8 + 3k \\ 3 - t = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k + 3 \\ 2t - 3k = 7 \\ -t - 2k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k + 3 \\ 2(k+3) - 3k = 7 \\ -(k+3) - 2k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k + 3 \\ -k = 1 \\ -3k = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = k + 3 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + 3 \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

Il existe un et un seul tel couple (k, t) donc $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes.

Faisons $t = 2$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on obtient :

$$x = 2 + t = 2 + 2 = 4$$
$$y = 1 + 2t = 1 + 2(2) = 5$$
$$z = 3 - t = 3 - 2 = 1$$

Conclusion : $\boldsymbol{I(4; 5; 1)}$.

Remarque

$$\begin{cases} x = 5 + k \\ y = 8 + 3k \\ z = 3 + 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

On peut vérifier au brouillon en faisant $k = -1$ dans la représentation paramétrique de Δ :

$$x = 5 + k = 5 - 1 = 4$$
$$y = 8 + 3k = 8 - 3 = 5$$
$$z = 3 + 2k = 3 + 2(-1) = 1$$

On retrouve bien les mêmes coordonnées $(4; 5; 1)$.

3. **Le point $G(9; 18; 5)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$ défini par les droites $\mathcal{D}$ et Δ ?**

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.

Dire que G appartient au plan défini par $\mathcal{D}$ et Δ revient à dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires et comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires cela revient à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{IG} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

On a : $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 9-4 \\ 18-5 \\ 5-1 \end{pmatrix}$, donc : $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 5 = \alpha + \beta \\ 13 = 2\alpha + 3\beta \\ 4 = -\alpha + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 2\alpha + 3\beta = 13 \\ -\alpha + 2\beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - \alpha \\ 2\alpha + 3(5-\alpha) = 13 \\ -\alpha + 2(5-\alpha) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - \alpha \\ -\alpha + 15 = 13 \\ -3\alpha + 10 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - \alpha \\ -\alpha = -2 \\ -3\alpha = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - \alpha \\ \alpha = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Il existe un tel couple (α, β) donc **G appartient au plan défini par les droites $\mathcal{D}$ et Δ**.

Exercice 2

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n - 49}{u_n - 13}$$

1. (programme Python)

```
03  while abs(U-7)>=0.01 :
05      U=(U-49)/(U-13)
```

2. f est définie sur $[1;7]$ par : $f(x) = \frac{x-49}{x-13}$

a. Déterminer le sens de variation de f sur $[1;7]$.

f est dérivable sur $[1;7]$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1(x-13) - 1(x-49)}{(x-13)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 13 - x + 49}{(x-13)^2}$$

$$f'(x) = \frac{36}{(x-13)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul et $36 > 0$ donc pour tout $x \in [1;7]$ on a $f'(x) > 0$ par conséquent **f est (strictement) croissante sur $[1;7]$.**

b. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 7$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition : « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 7$ ».

• initialisation

On a : $1 \leqslant 1 \leqslant 4 \leqslant 7$, or $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 7$: P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie, montrons que P_{k+1} est vraie.

$1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 7$ (H.R.)

Les nombres 1, u_k, u_{k+1} et 7 appartiennent à $[1;7]$ sur lequel f est strictement croissante donc conserve le sens de la relation d'ordre, donc : $f(1) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(7)$.

Or,

$$f(1) = \frac{1-49}{1-13} = \frac{-48}{-12} = 4$$

$$f(u_k) = \frac{u_k - 49}{u_k - 13} = u_{k+1}$$

$$f(u_{k+1}) = \frac{u_{k+1} - 49}{u_{k+1} - 13} = u_{k+2}$$

$$f(7) = \frac{7-49}{7-13} = \frac{-42}{-6} = \frac{7 \times 6}{6} = 7$$

donc : $4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 7$, et comme $1 \leqslant 4$ on en déduit : $1 \leqslant 4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 7$

donc en particulier : $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 7$, autrement dit P_{k+1} est vraie.

Conclusion :
il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 7}$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On déduit de **b.** que :
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 7$ donc la suite (u_n) est majorée par la constante 7

La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle **est convergente**.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n-4}{u_n-1}$ $(*)$.

D'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} u_N = +\infty$.

D'autre part, par limite d'une différence et d'un quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - 49}{u_n - 13} = \frac{\ell - 49}{\ell - 13}$$

Par passage à la limite dans $(*)$, on a :

$$\ell = \frac{\ell - 49}{\ell - 13} \Leftrightarrow \ell(l - 13) = \ell - 49 \text{ et } \ell \neq 13 \Leftrightarrow \ell^2 - 13\ell - \ell + 49 = 0 \text{ et } \ell \neq 13$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 - 14\ell + 49 = 0 \text{ et } \ell \neq 13 \Leftrightarrow (\ell)^2 - 2(\ell)(7) + (7)^2 = 0 \text{ et } \ell \neq 13$$
$$\Leftrightarrow (\ell - 7)^2 = 0 \text{ et } \ell \neq 13 \Leftrightarrow \ell - 7 = 0 \Leftrightarrow \ell = 7$$

Conclusion : $\boldsymbol{\ell = 7}$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\boldsymbol{v_n = \frac{1}{u_n - 7}}$$

a. Calculer v_0.

$$\boldsymbol{v_0} = \frac{1}{u_0 - 7} = \frac{1}{1 - 7} = \frac{1}{-6} = \boldsymbol{-\frac{1}{6}}$$

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 7} - \frac{1}{u_n - 7} = \frac{1}{\dfrac{u_n - 49}{u_n - 13} - 7} - \frac{1}{u_n - 7} = \frac{1}{\dfrac{u_n - 49}{u_n - 13} - \dfrac{7(u_n - 13)}{u_n - 13}} - \frac{1}{u_n - 7}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{u_n - 49 - 7(u_n - 13)}{u_n - 13}} - \frac{1}{u_n - 7} = \frac{1}{\dfrac{u_n - 49 - 7u_n + 91}{u_n - 13}} - \frac{1}{u_n - 7} = \frac{1}{\dfrac{-6u_n + 42}{u_n - 13}} - \frac{1}{u_n - 7}$$
$$= \frac{u_n - 13}{-6(u_n - 7)} - \frac{1}{u_n - 7} = \frac{-(u_n - 13)}{6(u_n - 7)} - \frac{1}{u_n - 7} = \frac{-u_n + 13}{6(u_n - 7)} - \frac{6}{6(u_n - 7)} = \frac{-u_n + 13 - 6}{6(u_n - 7)}$$
$$= \frac{-u_n + 7}{6(u_n - 7)} = \frac{-1(u_n - 7)}{6(u_n - 7)} = -\frac{1}{6}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{6}$ et $-\dfrac{1}{6}$ est une constante donc la suite $(\boldsymbol{v_n})$ **est arithmétique de raison $\boldsymbol{r = -\dfrac{1}{6}}$** (en notant r sa raison).

c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = v_0 + n \times r = -\frac{1}{6} + n \times \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6} - \frac{n}{6} = -\frac{n+1}{6}$$

Conclusion :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_n} = -\frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{6}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 7} \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = u_n - 7 \Leftrightarrow u_n = 7 + \frac{1}{v_n}$$

Puis en utilisant la forme explicite de v_n :

$$u_n = 7 + \frac{1}{-\frac{n+1}{6}} = 7 - \frac{1}{\frac{n+1}{6}} = 7 - \frac{6}{n+1}$$

Conclusion :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{7} - \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{n+1}}$$

d. Déterminer la limite de la suite $(\boldsymbol{u_n})$.

Par limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ puis par limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6}{n+1} = 0$ puis par limite d'une différence : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(7 - \frac{6}{n+1}\right) = 7.$

Conclusion : $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{7}.$

4. Justifier l'existence de l'entier $\boldsymbol{p}$ de la question 1. et déterminer par le calcul sa valeur.

Résolvons dans $\mathbb{N}$: $|u_n - 7| < 0{,}01$.

En utilisant la forme explicite de u_n obtenue en **3.c.,** cette inégalité s'écrit :

$$\left|7 - \frac{6}{n+1} - 7\right| < 0{,}01 \Leftrightarrow \left|-\frac{6}{n+1}\right| < 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{6}{n+1} < 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{n+1}{6} > \frac{1}{0{,}01}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{6} > 100 \Leftrightarrow n+1 > 6 \times 100 \Leftrightarrow n > 599 \Leftrightarrow n \geqslant 600 \ \ (n \in \mathbb{N})$$

On en déduit que p existe et que $\boldsymbol{p = 600}$.