

**Exercice.1 [5 points : 2 pt+3 pts]**

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (7^n + (-1)^n)$

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})$

**Exercice.2 [15 points]    d'après Bac S Métropole juin 2013**

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n \leq n + 3$$

- b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

- c. Déterminer le sens de variation de  $(u_n)$ .

2. Pour tout entier naturel, on pose :  $v_n = u_n - n$ .

- a. Déterminer  $v_0$ .

- b. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique et préciser sa raison.

- c. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

et pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

- a. Déterminer des constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  telles que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$S_n = a + b \left(\frac{2}{3}\right)^n + cn^2 + dn$$

- b. Déterminer la limite de la suite  $(T_n)$ .

## Corrigé

### Exercice.1

#### 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (7^n + (-1)^n)$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ ,

puis en ajoutant  $7^n$  à chaque membre :  $-1 + 7^n \leq 7^n + (-1)^n \leq 1 + 7^n$

On a :  $7 > 1$ , or si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$ ,

puis par limite d'une somme :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [-1 + 7^n] = +\infty$ .

On a :  $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, -1 + 7^n \leq 7^n + (-1)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} [-1 + 7^n] = +\infty \end{cases}$  donc d'après le théorème de comparaison on en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [7^n + (-1)^n] = +\infty$ .

#### Autre méthode

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$7^n + (-1)^n = 7^n \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{7^n} \right] = 7^n \left[ 1 + \left( \frac{-1}{7} \right)^n \right] = 7^n \left[ 1 + \left( -\frac{1}{7} \right)^n \right]$$

$7 > 1$ , or si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$  (\*)

$-1 < -\frac{1}{7} < 1$ , or si  $-1 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{7} \right)^n = 0$

puis :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \left( -\frac{1}{7} \right)^n \right] = 1$  (\*\*)

Par limite d'un produit on déduit de (\*) et (\*\*) que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 7^n \left[ 1 + \left( -\frac{1}{7} \right)^n \right] \right) = +\infty$ ,

donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [7^n + (-1)^n] = +\infty$ .

#### 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 4n + 2} - \sqrt{n^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{n^2 + 4n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 4n + 2} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 4n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + 4n + 2})^2 - (\sqrt{n^2 + 1})^2}{\sqrt{n^2 + 4n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n^2 + 4n + 2 - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 4n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{4n + 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n \left( 4 + \frac{1}{n} \right)}{n \left( \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)} = \frac{4 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$  (cours) puis par limite d'une somme et en prenant la racine carrée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = 2$$

puis par limite d'un quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 2$$

Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^2 + 4n + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = 2$$

## Exercice 2

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1. a. **Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \leq n + 3$ .**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on considère la proposition  $P_n$  : «  $u_n \leq n + 3$  ».

### • initialisation

On a :  $2 \leq 0 + 3$ , or  $u_0 = 2$  donc  $u_0 \leq 0 + 3$  :  $P_0$  est vraie.

### • hérédité

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $P_k$  : «  $u_k \leq k + 3$  » est vraie.

Montrons que  $P_{k+1}$  : «  $u_{k+1} \leq (k + 1) + 3$  » est vraie.

On a :  $u_k \leq k + 3$ , puis en multipliant chaque membre par  $\frac{2}{3} > 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}u_k &\leq \frac{2}{3}(k + 3) \\ \frac{2}{3}u_k &\leq \frac{2}{3}k + 2 \end{aligned}$$

puis en ajoutant  $\frac{1}{3}k + 1$  à chaque membre :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 &\leq \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1 \\ u_{k+1} &\leq k + 3 \end{aligned}$$

Or,  $k + 3 \leq k + 4$ , donc :

$$u_{k+1} \leq k + 4$$

ce qui s'écrit aussi :

$$u_{k+1} \leq (k + 1) + 3$$

autrement dit  $P_{k+1}$  est vraie.

### Conclusion :

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est vraie, autrement dit :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + 3$ .

**b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}n + 1 - \frac{1}{3}u_n \\ &= \frac{1}{3}\left(n + \frac{1}{\frac{1}{3}} - u_n\right) = \frac{1}{3}\left(n + 1 \times \frac{3}{1} - u_n\right) = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

**c. Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a montré en **a.** que :  $u_n \leq n + 3$ , donc :  $n + 3 - u_n \geq 0$ ,

puis en multipliant par  $\frac{1}{3} > 0$  :  $\frac{1}{3}(n + 3 - u_n) \geq \frac{1}{3}(0)$ ,

autrement dit :  $\frac{1}{3}(n + 3 - u_n) \geq 0$ .

Or,  $\frac{1}{3}(n + 3 - u_n) = u_{n+1} - u_n$ , donc :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$ , donc **la suite  $(u_n)$  est croissante.**

**2. Pour tout entier naturel, on pose :  $v_n = u_n - n$ .**

**a. Déterminer  $v_0$ .**

$$v_0 = u_0 - 0 = 2 - 0 = 2$$

Conclusion :  **$v_0 = 2$ .**

**b. Montrer que  $(v_n)$  est géométrique et préciser sa raison.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n + 1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n - \frac{3}{3}n = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n \\ &= \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$  et  $\frac{2}{3}$  est une constante, donc  **$(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ .**

**c. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$(v_n)$  est géométrique donc en notant  $q$  sa raison on a :  $v_n = v_0 \times q^n$ .

or,  $v_0 = 2$  et  $q = \frac{2}{3}$ , donc :  $v_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

a. Déterminer des constantes  $a, b, c$  et  $d$  telles que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$S_n = a + b \left(\frac{2}{3}\right)^n + cn^2 + dn$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= v_0 + 0 + v_1 + 1 + \cdots + v_n + n \\ &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n + 0 + 1 + \cdots + n \\ &= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} + \frac{n^2 + n}{2} \\ &= 2 \times \frac{3}{1} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ &= 6 \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ &= 6 - 6 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ &= 6 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

Résumons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 6 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

En comparant avec l'expression proposée :  $a = 6, b = -4, c = d = \frac{1}{2}$  conviennent.

b. Déterminer la limite de la suite  $(T_n)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{S_n}{n^2} = \frac{6 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2} = \frac{6}{n^2} - \frac{4 \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^2} + \frac{\frac{1}{2}n^2}{n^2} + \frac{\frac{1}{2}n}{n^2} \\ T_n &= \frac{6}{n^2} - \frac{4 \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On a :  $-1 < \frac{2}{3} < 1$ , or si  $-1 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 0$

D'autre part,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  (cours) donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^2} = 0$$

D'autre part :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  (cours) d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{n}\right) = 0$  puis par limite d'une somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{6}{n^2} - \frac{4 \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

Conclusion :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2}$