

Exercice 1 [5 pts]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n+5} + 2$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 [4 pts]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{4n+11}{n+2}$$

On souhaite démontrer en revenant à la définition que la suite (u_n) converge vers 4 c'est-à-dire que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|u_n - 4| < \varepsilon$.

Exprimer n_0 en fonction de ε , justifier.

Exercice 3 [11 pts]

On pose $u_0 = 40$ et, pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$.

1. Calculer u_1 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel on a : $10 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 40$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 10$.
 - a. Montrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n , $n \in \mathbb{N}$.
 - c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note S_n la somme des termes consécutifs de (v_n) de v_0 à v_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + \cdots + v_n$$

Exprimer S_n en fonction de n .

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note T_n la somme des termes consécutifs de (u_n) de u_0 à u_n :

$$T_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \cdots + u_n$$

- a. Dédurre de 5.c. que : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = 10n + 85 - 45 \times 0,6^n$.
- b. On rappelle que : « si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ », déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

Corrigé

Exercice 1

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sin(n)}{n+5} + 2$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ puis en divisant chaque membre par $n+5 > 0$:

$$\frac{-1}{n+5} \leq \frac{\sin(n)}{n+5} \leq \frac{1}{n+5}$$

puis en ajoutant 2 à chaque membre :

$$\frac{-1}{n+5} + 2 \leq \frac{\sin(n)}{n+5} + 2 \leq \frac{1}{n+5} + 2$$

autrement dit :

$$2 - \frac{1}{n+5} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n+5}$$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+5) = +\infty$ donc, par limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+5} = 0$, puis par limite

d'une différence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n+5}\right) = 2$.

On montrerait de même que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n+5}\right) = 2$

Résumons :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 2 - \frac{1}{n+5} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n+5} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n+5}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n+5}\right) = 2 \end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4n+11}{n+2}$

On souhaite démontrer en revenant à la définition que la suite (u_n) converge vers 4 c'est-à-dire que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|u_n - 4| < \varepsilon$.

Déterminer n_0 en fonction de ε , justifier.

Recherche

$$\begin{aligned} |u_n - 4| &= \left| \frac{4n+11}{n+2} - \frac{4(n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{4n+11}{n+2} - \frac{4n+8}{n+2} \right| = \left| \frac{4n+11-(4n+8)}{n+2} \right| \\ &= \left| \frac{4n+11-4n-8}{n+2} \right| = \left| \frac{3}{n+2} \right| = \frac{3}{n+2} \\ \frac{3}{n+2} < \varepsilon &\quad 3 < \varepsilon(n+2) \quad \frac{3}{\varepsilon} < n+2 \quad \frac{3}{\varepsilon} - 2 < n \end{aligned}$$

n_0 = plus premier entier naturel strictement plus grand que : $\frac{3}{\varepsilon} - 2$.

Soit ε un réel strictement positif, posons : n_0 = le premier entier naturel strictement plus grand que $\frac{3}{\varepsilon} - 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ on a : $n \geq n_0$ et $n_0 > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ donc $n > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, autrement dit $n + 2 > \frac{3}{\varepsilon}$,

puis en multipliant par $\varepsilon > 0$: $\varepsilon(n + 2) > 3$,

puis en divisant par $n + 2 > 0$: $\varepsilon > \frac{3}{n+2}$ autrement dit : $\frac{3}{n+2} < \varepsilon$.

Or,

$$|u_n - 4| = \left| \frac{4n + 11}{n + 2} - \frac{4(n + 2)}{n + 2} \right| = \left| \frac{4n + 11}{n + 2} - \frac{4n + 8}{n + 2} \right| = \left| \frac{4n + 11 - (4n + 8)}{n + 2} \right|$$

$$= \left| \frac{4n + 11 - 4n - 8}{n + 2} \right| = \left| \frac{3}{n + 2} \right| = \frac{3}{n + 2}$$

donc l'inégalité (*) s'écrit aussi : $|u_n - 4| < \varepsilon$.

Résumons :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - 4| < \varepsilon$ où n_0 est le premier entier naturel strictement plus grand que : $\frac{3}{\varepsilon} - 2$.

Exercice 3 [11 points]

$u_0 = 40$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP DEUXIÈME CONDITION SI NÉCESSAIRE	
Graph1 Graph2 Graph3	
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)	
nMin=0	
u(n+1)=0.6*u(n)+4	
u(0)=40	
u(1)=	
v(n+1)=	
v(0)=	
v(1)=	
w(n+1)=	

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP APP SUR + POUR ΔTb1	
n	u
0	40
1	28
2	20.8
3	16.48
4	13.888
5	12.333
6	11.4
7	10.84
8	10.504
9	10.302
10	10.181

1. Calculer u_1 .

$$u_1 = 0,6u_0 + 4 = 0,6 \times 40 + 4 = 24 + 4 = 28$$

$$u_1 = 28$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel : $10 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 40$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note P_n la proposition « $10 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 40$ ».

• initialisation

On a : $10 \leq 28 \leq 40 \leq 40$, or $u_1 = 28$ et $u_0 = 40$, donc : $10 \leq u_0 \leq u_1 \leq 40$ autrement dit P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $10 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 40$ » est vraie et montrons que

P_{k+1} : « $10 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 40$ » est vraie.

On a : $10 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 40$, en multipliant chaque membre par $0,6 > 0$ on en déduit :

$$0,6 \times 10 \leq 0,6 \times u_{k+1} \leq 0,6 \times u_k \leq 0,6 \times 40$$

autrement dit : $6 \leq 0,6u_{k+1} \leq 0,6u_k \leq 24$,

puis en ajoutant 4 à chaque membre :

$$6 + 4 \leq 0,6u_{k+1} + 4 \leq 0,6u_k + 4 \leq 24 + 4$$

autrement dit : $10 \leq 0,6u_{k+1} + 4 \leq 0,6u_k + 4 \leq 28$.

Or, $0,6u_{k+1} + 4 = u_{k+2}$ et $0,6u_k + 4 = u_{k+1}$ donc : $10 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 28 \leq 40$, d'où en particulier $10 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 40$: P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit que : $\forall n \in \mathbb{N}, 10 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 40$.

3. Justifier que la suite (u_n) converge.

Il résulte de la question précédente que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, 10 \leq u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par la constante 10

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone **elle est convergente**.

4. Déterminer sa limite ℓ .

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,6u_n + 4$, or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$,

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = \ell$ (*). D'autre part, par limite d'un produit et d'une somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,6u_n + 4) = 0,6\ell + 4$ (**).

On déduit de (*) et (**) que : $\ell = 0,6\ell + 4$, puis on a les équivalences :

$$\ell = 0,6\ell + 4 \Leftrightarrow \ell - 0,6\ell = 4 \Leftrightarrow 0,4\ell = 4 \Leftrightarrow \ell = \frac{4}{0,4} \Leftrightarrow \ell = 10$$

Conclusion : $\ell = 10$.

5. Pour tout n entier naturel on pose : $v_n = u_n - 10$.

a. Démontrer que (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

- calculons v_0

$$v_0 = u_0 - 10 = 40 - 10 = 30$$

- montrons que la suite (v_n) est géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 = 0,6u_n + 4 - 10 = 0,6u_n - 6 = 0,6 \left(u_n - \frac{6}{0,6} \right) \\ &= 0,6(u_n - 10) = 0,6v_n \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,6 \times v_n$ et 0,6 est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,6.

Conclusion :

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = 30$.

b. Exprimer v_n en fonction de $n, n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La suite (v_n) est géométrique donc, en notant q sa raison, on a : $v_n = v_0 \times q^n$.

Or, $q = 0,6$ et $v_0 = 30$, donc : $v_n = 30 \times 0,6^n$.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 30 \times 0,6^n$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note S_n la somme des termes consécutifs de (v_n) de v_0 à v_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + \dots + v_n$$

Exprimer S_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

S_n est la somme de termes consécutifs de la suite géométrique (v_n) de v_0 à v_n donc :

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Or, $v_0 = 30$ et $q = 0,8$ donc :

$$S_n = 30 \times \frac{1 - 0,6^{n+1}}{1 - 0,6} = 30 \times \frac{1 - 0,6^{n+1}}{0,4} = \frac{30}{0,4} \times (1 - 0,6^{n+1}) = 75(1 - 0,6^{n+1})$$

$$S_n = 75 - 75 \times 0,6^{n+1}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 75 - 75 \times 0,6^{n+1}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note T_n la somme des termes consécutifs de (u_n) de u_0 à u_n :

$$T_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n$$

a. Dédire de 5. c. que : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = 10n + 85 - 45 \times 0,6^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T_n = u_0 + \dots + u_n = v_0 + 10 + \dots + v_n + 10 = \underbrace{v_0 + \dots + v_n}_{S_n} + \underbrace{10 + \dots + 10}_{n+1 \text{ termes } 10}$$

$$= S_n + (n+1) \times 10 = 75 - 75 \times 0,6^{n+1} + 10n + 10 = 10n + 85 - 75 \times 0,6^{n+1}$$

$$= 10n + 85 - 45 \times 0,6^n$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = 10n + 85 - 45 \times 0,6^n$$

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

On a : $-1 < 0,6 < 1$, or si $-1 < q < 1$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (10n) = +\infty$, puis par limite d'une somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (10n + 85 - 45 \times 0,6^n) = +\infty$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (10n + 85 - 45 \times 0,6^n) = +\infty$$

Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$$