

■ EXERCICE 1 [5 points]

Partie 1

1. Soit E un ensemble à 20 éléments ? Soit X une partie à 7 éléments de E .

Alors le nombre de parties de E disjointes de X est égal à :

a. 2^{13} b. $\binom{20}{13}$ c. $\frac{20!}{(20-13)!}$ d. $20^{20} - 2^{13}$

2. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

Alors le nombre de tirages contenant au moins un roi est égal à :

a. $\binom{4}{1} \times \binom{48}{4}$ b. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$
 c. $\left[\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right] \times \binom{48}{1}$ d. $\binom{4}{1} \times 3! \times \binom{48}{3}$

3. Le nombre d'anagrammes du mot VOURSHLAFE commençant et finissant par une consonne est égal à :

a. 1 209 600 b. 40 320 c. 1 814 400 d. 34 560

4. On pose, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2n + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n$$

a. (u_n) est convergente.

b. (S_n) est convergente.

c. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = n^2 + n + 3 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$

d. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = n^2 + n + 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$

Partie 2

On considère (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $u_n > 3$.

Soit (v_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{2}{u_n - 3}$.

Affirmation 1 :

« si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente »

Affirmation 2 :

« si (u_n) est croissante, alors (v_n) est décroissante »

Affirmation 3 :

« si (u_n) est majorée par 4, alors (v_n) est minorée par 1 »

CorrigéPartie 1

1. Soit E un ensemble à 20 éléments ? Soit X une partie à 7 éléments de E . Alors le nombre de parties de E disjointes de X est égal à :

a. 2^{13}

Une partie de E disjointe de X contient $20 - 7 = 13$ éléments, or le nombre de partie d'un ensemble à n éléments est 2^n donc il y a 2^{13} partie de E disjointes de X .

2. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

Alors le nombre de tirages contenant au moins un roi est égal à :

b. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$

Il y a $\binom{52}{5}$ mains de 5 cartes et $\binom{52-4}{5} = \binom{48}{5}$ mains n'ayant aucun roi, donc il y a $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$ mains ne contenant aucun roi.

3. Le nombre d'anagrammes du mot VOURSHLAFE commençant et finissant par une consonne est égal à : **a.** 1 209 600

Le mot VOURSHLAFE est de longueur 10 dont 6 consonnes :

- choisir la première lettre parmi mes consonne : 6 choix
- puis choisir la dernière lettre parmi les consonnes : 5 choix
- puis permuter les $10 - 1 - 1 = 8$ lettres restantes : $8!$ choix

Comme les choix se multiplient, il y aura :

$$6 \times 8! \times 5 = 1\,209\,600 \text{ anagrammes.}$$

4. On pose, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2n + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n$$

- a. (u_n) est convergente. b. (S_n) est convergente.

c. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = n^2 + n + 3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

d. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = n^2 + n + 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Les réponses a. et b. étant clairement fausses, déterminons S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + \dots + u_n = 2(0) + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \dots + 2(n) + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2(0 + \dots + n) + 3 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = n^2 + n + 6 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

PARTIE 2

On considère (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $u_n > 3$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{u_n - 3}.$$

Affirmation 1 :

« Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente. »

FAUX

Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + \frac{1}{n}$ alors d'une part (u_n) converge (vers 3), d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{2}{u_n - 3} = \frac{2}{3 + \frac{1}{n} - 3} = \frac{2}{\frac{1}{n}} = 2n$$

donc (v_n) diverge.

Affirmation 2 :

« Si (u_n) est croissante, alors (v_n) est décroissante. »

VRAI

Soit $n \in \mathbb{N}$, on :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2}{u_{n+1} - 3} - \frac{2}{u_n - 3} = \frac{2(u_n - 3) - 2(u_{n+1} - 3)}{(u_{n+1} - 3)(u_n - 3)} \\ &= \frac{-2(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - 3)(u_n - 3)} \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 3$, donc $u_n - 3 > 0$, de même : $u_{n+1} - 3 > 0$, d'où $(u_{n+1} - 3)(u_n - 3) > 0$. D'autre part, (u_n) est croissante donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ puis $-2(u_{n+1} - u_n) \leq 0$.

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq 0$ donc (v_n) est décroissante.

Affirmation 3 :

« Si (u_n) est majorée par 4, alors (v_n) est minorée par 1. »

VRAI

Soit $n \in \mathbb{N}$, (u_n) est majorée par 4 donc : $u_n \leq 4$ et come $u_n > 3$ on en déduit : $3 < u_n \leq 4$, puis en retranchant 3 à chaque membre :

$0 < u_n - 3 \leq 1$, en passant aux inverses : $\frac{1}{u_n - 3} \geq \frac{1}{1}$, et en

multipliant par le nombre positif 2 : $\frac{2}{u_n - 3} \geq 2$, autrement dit :

$v_n \geq 2$, d'où : $v_n \geq 1$.

Résumons : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 1$ donc (v_n) est minorée par 1.

■ EXERCICE 2 [5 points]

Dans une association sportive, parmi les femmes, un quart adhère à la section tennis et parmi les hommes, un tiers adhère à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association, on note :

- F l'évènement « le membre choisi est une femme »
- T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis »

1. Traduire les informations de l'énoncé sous forme de probabilités.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,4.
3. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie chaque semaine pendant le mois de décembre qui comporte quatre semaines consécutives.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard pour tenir la loterie. On suppose que chaque membre a la même probabilité d'être choisi et qu'un membre peut tenir la loterie plusieurs fois. On appelle Y la variable aléatoire donnant le

nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les quatre membres choisis au cours du mois de décembre.

- a. Justifier que la variable Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,3$.
- b. Déterminer la probabilité pour qu'au mois de décembre, il y ait exactement deux membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis.
- c. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre adhérant à la section tennis parmi les membres choisis. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons : 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5€ puis tire au hasard et successivement deux jetons de l'urne, sans remettre le premier jeton tiré dans l'urne pour le deuxième tirage : il reçoit alors 20€ par jeton gagnant.

Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne pour le joueur suivant.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

On note dans cette question :

- G_1 l'évènement « le premier jeton tiré est gagnant »
 - G_2 l'évènement « le second jeton tiré est gagnant »
- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

- b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interprétez le résultat obtenu.

Corrigé

Parmi les femmes, un quart adhère à la section tennis et parmi les hommes, un tiers adhère à la section tennis,
30% des membres adhèrent à la section tennis

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association, on note :

- F l'évènement « le membre choisi est une femme »
- T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis »

1. Traduire les informations de l'énoncé sous forme de probabilités.

– parmi les femmes, un quart adhère à la section tennis

se traduit par : $P_F(T) = \frac{1}{4}$

– parmi les hommes, un tiers adhère à la section tennis

se traduit par : $P_{\bar{F}}(T) = \frac{1}{3}$

– 30% des membres adhèrent à la section tennis

se traduit par : $P(T) = 0,3$

2. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,4.

Les événements F et $\bar{F}$ réalisent une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(F \cap T) + P(\bar{F} \cap T) = P(F)P_F(T) + P(\bar{F})P_{\bar{F}}(T)$$

$$P(T) = P(F)P_F(T) + (1 - P(F))P_{\bar{F}}(T)$$

En utilisant les probabilités connues, on obtient :

$$0,3 = P(F) \times \frac{1}{4} + (1 - P(F)) \times \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0,3 &= P(F) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times P(F) \Leftrightarrow 0,3 = P(F) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{10} &= -\frac{1}{12}P(F) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{12}P(F) = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} \\ \Leftrightarrow P(F) &= \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10} \right) \times 12 \end{aligned}$$

Or,

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10} \right) \times 12 = \frac{10 - 9}{30} \times 12 = \frac{12}{30} = \frac{3 \times 4}{3 \times 10} = \frac{4}{10} = 0,4$$

On a donc bien : $P(F) = 0,4$.

3. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Il s'agit de calculer $P_T(F)$, on a :

$$\begin{aligned} P_T(F) &= \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{P(F) \times P_F(T)}{P(T)} = \frac{0,4 \times \frac{1}{4}}{0,3} = \frac{0,4}{0,3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On a donc finalement : $P_T(F) = \frac{1}{3}$.

Partie B

Les membres de cette association organisent une loterie chaque semaine pendant le mois de décembre qui comporte quatre semaines consécutives.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard pour tenir la loterie, chaque membre a la même probabilité d'être choisi et qu'un membre peut tenir la loterie plusieurs fois. On appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les quatre membres choisis au cours du mois de décembre.

a. Justifier que la variable Y suit $\mathcal{B}(n = 4; p = 0,3)$.

On considère l'épreuve « choisir au hasard un membre de l'association pour tenir la loterie », elle admet deux issues :
– le succès : il est adhérent à la section tennis, de probabilité $p = 0,3$
– l'échec : il n'est pas adhérent à la section tennis, de probabilité $q = 1 - p = 0,7$

On répète avec indépendance 4 fois cette épreuve donc la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès suit la **loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,3$** .

b. Déterminer la probabilité pour qu'au mois de décembre, il y ait exactement deux membres adhérent à la section tennis parmi les membres choisis.

Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement $Y = 2$.
Or, pour tout $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, on a :

$$P(Y = k) = \binom{4}{k} 0,3^k 0,7^{4-k}$$

donc :

$$P(Y = 2) = \binom{4}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^2 = 6 \times 0,09 \times 0,49 = 0,2646$$

La probabilité qu'il y ait exactement deux membres adhérents à la section tennis est égale à 0,2646.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n est la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre adhérent à la section tennis parmi les membres choisis. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.

Il y a répétition avec indépendance n fois d'une même

épreuve, la probabilité qu'il n'y ait aucun membre de la section tennis est $0,7^n$, donc la probabilité qu'il y ait au moins un membre de la section tennis, son contraire, est :
 $p_n = 1 - 0,7^n$.

Il s'agit donc de déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0,7^n \geq 0,99$ c'est-à-dire tel que : $0,01 \geq 0,7^n$.
Or, à la calculatrice : $0,7^{12} \approx 0,014$ et $0,7^{13} \approx 0,0097 < 0,01$ donc **$n = 13$** .

Autre méthode :

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} 0,01 \geq 0,7^n &\Leftrightarrow \ln(0,01) \geq \ln((0,7)^n) \\ &\Leftrightarrow \ln(0,01) \geq n \ln(0,7) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} \leq n \quad (\ln(0,7) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} \end{aligned}$$

Or, à la calculatrice, $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} \approx 12,91$ donc le plus petit entier naturel n vérifiant $p_n \geq 0,99$ est **$n = 13$** .

1. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons : 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5€ puis tire au hasard et successivement deux jetons de l'urne, sans remettre le premier jeton tiré dans l'urne pour le deuxième tirage : il reçoit alors 20€ par jeton gagnant.

Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne pour le joueur suivant. On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie. On note dans cette question :

- G_1 l'évènement « le premier jeton tiré est gagnant »
- G_2 l'évènement « le second jeton tiré est gagnant »

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

$$P(X = -5) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = \frac{90}{100} \times \frac{89}{99} = \frac{8010}{9900}$$

$$P(X = 15) = P(G_1 \cap \overline{G_2}) + P(\overline{G_1} \cap G_2) \\ = \frac{10}{100} \times \frac{90}{99} + \frac{90}{100} \times \frac{10}{99} = \frac{1800}{9900}$$

$$P(X = 35) = P(G_1 \cap G_2) = \frac{10}{100} \times \frac{9}{99} = \frac{90}{9900}$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-5	15	35
$P(X = x_i)$	$\frac{8\,010}{9\,900}$	$\frac{1\,800}{9\,900}$	$\frac{90}{9\,900}$

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interprétez le résultat obtenu.

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 P(X = x_i) x_i \\ = \frac{8010}{9900} \times (-5) + \frac{1800}{9900} \times 15 + \frac{90}{9900} \times 35 = -1$$

Résumons : $E(X) = -1$ €.

Sur un grand nombre de parties le joueur va perdre en moyenne 1€ par partie jouée (c'est une estimation).

■ EXERCICE 3 [5 points]

Le but de l'exercice est de construire une suite qui converge vers l'unique solution réelle (l'existence et l'unicité de la solution sont admises) de l'équation $(E) : e^x = \frac{1}{x}$.

Partie 1

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On prendra soin d'étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

D'après le tableau de variations de la fonction f on peut établir que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α et que $\alpha \in [0, 5 ; 1]$.

3. Montrez que la fonction f est négative sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Partie 2

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$, en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Partie 3

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .
4. Compléter les lignes 3 à 6 du programme Python en annexe à rendre avec le sujet afin qu'il renvoie u_7 .

ANNEXE

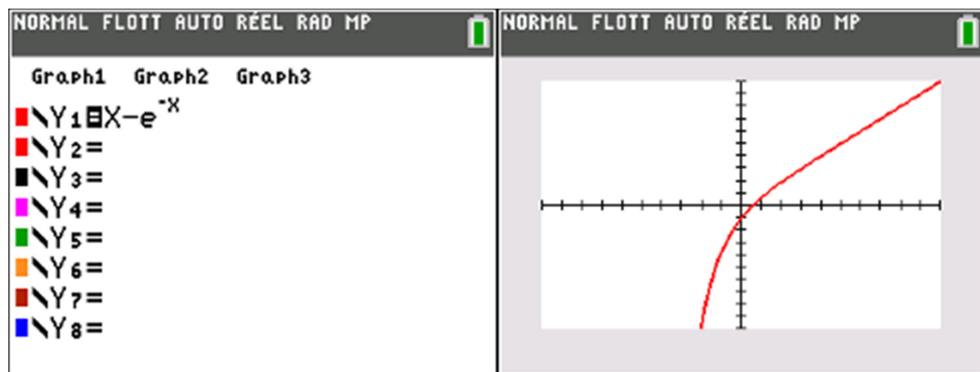
```
1 from math import *
2 def calcul_suite():
3     U=
4     for k in range(1, ...):
5         U= ...
6     return ...
```

Corrigé

Le but de l'exercice est de construire une suite qui converge vers l'unique solution réelle (l'existence et l'unicité de la solution sont admises) de l'équation $(E) : e^x = \frac{1}{x}$.

Partie 1

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.



1. **D.M.Q : x est solution de l'équation (E) ssi $f(x) = 0$.**

On a les équivalences :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x \times (x - e^{-x}) = e^x \times 0$$

$$xe^x - 1 = 0 \Leftrightarrow xe^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \text{ est solution de } (E)$$

On a donc bien : x est solution de $(E) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

2. **Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ avec limites aux bornes.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - e^{-x}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ (cours)

donc par limite d'une différence : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-x}) = -\infty$.

Résumons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ (cours)

donc par limite d'une différence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^{-x}) = +\infty$.

Résumons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- $f(x) = x - e^{-x}$

Rappel : $(e^u)' = u' e^u$

$$f'(x) = 1 - (-1)e^{-x}$$

$$f'(x) = 1 + e^{-x}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-x} > 0$ donc $1 + e^{-x} > 0$, i.e. $f'(x) > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **tableau de variation de f**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
Sens de variation de f	$-\infty$	$+\infty$

On admet que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α et que $\alpha \in [0, 5 ; 1]$.

3. Montrez que la fonction f est négative sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
 Soit $x \in [0 ; \alpha]$, on a : $0 \leq x \leq \alpha$. Or f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc conserve le sens des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$, par conséquent $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$, donc en particulier $f(x) \leq f(\alpha)$.
 Or, $f(\alpha) = 0$ donc $f(x) \leq 0$.
 Conclusion : $\forall x \in [0 ; \alpha], f(x) \leq 0$ autrement dit $f(x)$ est négatif sur $[0 ; \alpha]$.

Partie 2

On note g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} g(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow 1+x = x(1+e^x) \\ &\Leftrightarrow 1+x = x + xe^x \Leftrightarrow 1 = xe^x \Leftrightarrow e^{-x} \times 1 = e^{-x} \times xe^x \\ &\Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow 0 = x - e^{-x} \Leftrightarrow 0 = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0 \end{aligned}$$

On a donc bien : $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
 D'après la question précédente : $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$
 donc les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ ont exactement les mêmes solutions, or l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution à savoir α donc l'équation $g(x) = x$ admet pour unique solution α .

Résumons : α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculer $g'(x)$, en déduire que g est croissante sur $[0 ; \alpha]$.

$$\forall x \in [0 ; 1], g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad \text{et} \quad (e^x)' = e^x$$

$$g'(x) = \frac{1(1+e^x) - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1+e^x - e^x - xe^x}{(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-(xe^x - 1)}{(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-f(x)}{(1+e^x)^2}$$

Soit $x \in [0 ; \alpha]$, on déduit de 3. que : $f(x) \leq 0$,
 donc : $-f(x) \geq 0$ puis en divisant par $(1+e^x)^2$ qui est strictement positif, on obtient : $g'(x) \geq 0$.

Conclusion :

$\forall x \in [0 ; \alpha], g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0 ; \alpha]$.

Partie 3

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :
 $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
 $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

$$u_1 = g(u_0) = g(0) = \frac{1+0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

- initialisation

On a : $0 \leq 0 \leq 0,5 \leq \alpha$, autrement dit : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$,
 P_0 est donc vraie.

- hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.

On a : $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$ (hypothèse de récurrence).

Les nombres $0, u_k, u_{k+1}$ et α appartiennent à l'intervalle $[0; \alpha]$ sur lequel g est croissante (partie 2 question 3.) donc conserve le sens des relations d'ordre, donc :

$$g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha)(*)$$

Or, on a :

$g(0) = 0,5, g(u_k) = u_{k+1}, g(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $g(\alpha) = \alpha$,

donc (*) s'écrit aussi : $0,5 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha (**)$,

et comme $0 \leq 0,5$ on déduit de (**) que : $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$
 P_{k+1} est donc vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On déduit de 1. que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante,

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$ donc (u_n) est majorée par la constante α .

La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone **elle est convergente**.

On note ℓ sa limite.

3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .

Par passage à la limite de : $0 \leq u_n \leq \alpha$, on a : $0 \leq \ell \leq \alpha$,
 g est dérivable donc continue sur $[0; \alpha]$ et $\ell \in [0; \alpha]$
donc par passage à la limite de $u_{n+1} = g(u_n)$ on déduit :
 $\ell = g(\ell)$, autrement dit : **$g(\ell) = \ell$** .

On a montré que l'équation $g(x) = x$ admet α pour unique solution dans $[0; \alpha]$, or $\ell \in [0; \alpha]$ et $g(\ell) = \ell$ donc ℓ est une solution dans $[0; \alpha]$ de l'équation $g(x) = x$, donc **$\ell = \alpha$** .

4. Compléter les lignes 3 à 6 du programme Python en annexe à rendre avec le sujet afin qu'il renvoie u_7 .

ANNEXE

1 from math import *

2. def calcul_suite() :

3. U=0

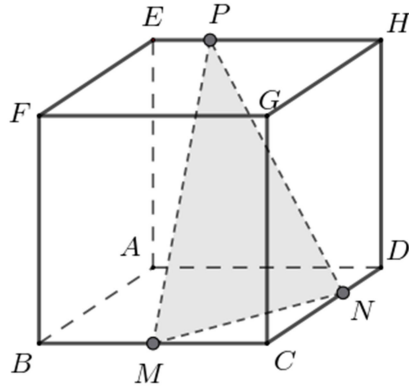
4. for k in range(1,8) :

5. U=(1+U)/(1+exp(U))

6. return U

■ EXERCICE 4 [5 points]

$ABCDEFGH$ est un cube, M est le milieu de $[BC]$, N et P sont définis de la manière suivante : $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$.



Partie A

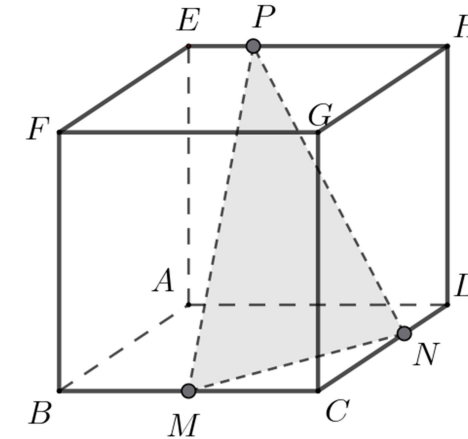
Sur la feuille annexe, tracez la section du plan (MNP) sur le cube.
On laissera les traits de construction apparents.
Aucune justification n'est attendue.

Partie B

Dans cette seconde partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner, sans justifier, les coordonnées de D, F, H, M, N et P .
2. Les vecteurs $\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont-ils coplanaires ?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point P et parallèle à la droite (MN) .
4. Déterminer les coordonnées du point K appartenant à la droite (d) et d'ordonnée 1.
5. Justifier que le point K est sur la droite (GH) .

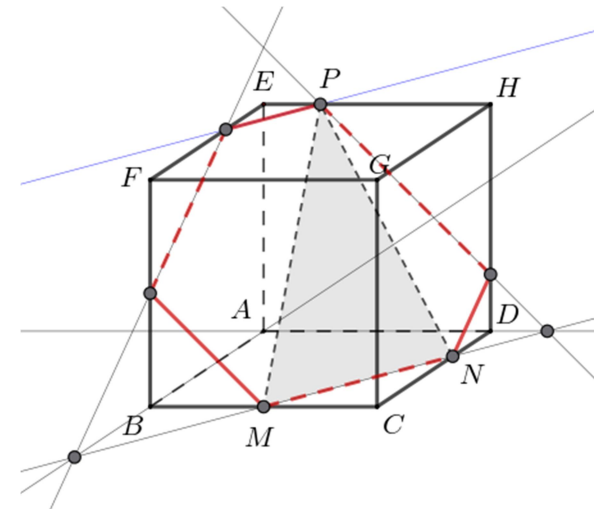
ANNEXE



Corrigé

$ABCDEFGH$ cube, M milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$

Partie A



Partie B repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Sans justifier, les coordonnées de D, F, H, M, N et P

$$D(0; 1; 0), F(1; 0; 1), H(0; 1; 1), M(1; 0; 5; 0), N\left(\frac{1}{3}; 1; 0\right), P\left(0; \frac{1}{4}; 1\right)$$

2. $\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont-ils coplanaires ?

$\overrightarrow{HM}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0,5 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{HN}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_N - x_H \\ y_N - y_H \\ z_N - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{1}{3} - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_D \\ z_F - z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résumons :

$$\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{HN} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire que les deux vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HN}$ sont colinéaires revient à dire que les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls, or :

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -0,5 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - \frac{1}{3}(-0,5) = \frac{1}{3} \times 0,5 \neq 0$$

donc $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HN}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent dire que les trois vecteurs $\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires revient à dire

qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\overrightarrow{DF} = \alpha \overrightarrow{HM} + \beta \overrightarrow{HN}$.

On a les équivalences :

$$\begin{cases} \alpha + \frac{1}{3}\beta = 1 \\ -0,5\alpha + 0\beta = -1 \\ -\alpha - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \frac{1}{3}\beta = 1 \\ \alpha = 2 \\ -2 - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \frac{1}{3}\beta = 1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{1}{3(-3)} = 1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Il existe un tel couple (α, β) , à savoir $(\alpha, \beta) = (2, -3)$ donc les trois vecteurs $\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.

3. Droite (d) passant par P et parallèle à (MN)

Rappelons que :

$$P\left(0; \frac{1}{4}; 1\right), M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right) \text{ et } N\left(\frac{1}{3}; 1; 0\right)$$

$\overrightarrow{MN}$ est un vecteur directeur de (d) et il a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 1 \\ 1 - \frac{1}{2} \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de (d) est donc :

$$(d) : \begin{cases} x = 0 + \left(-\frac{2}{3}\right)t \\ y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 + 0t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

autrement dit :

$$(d) : \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t \\ y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

4. Coordonnées de K appartenant à (d) et d'ordonnée 1

$K \in (d)$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_K = -\frac{2}{3}t \\ y_K = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \\ z_K = 1 \end{cases}$$

Or, son ordonnée vaut 1 donc :

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t \Leftrightarrow \frac{3}{4} \times 2 = t \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$$

Donc :

$$x_K = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$$

Finalement : $K(-1 ; 1 ; 1)$.

5. Justifier que le point K est sur la droite (GH) .

Dire que $K \in (GH)$ revient à dire que $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{GK}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_K - x_G \\ y_K - y_G \\ z_K - z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{GH}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_H - x_G \\ y_H - y_G \\ z_H - z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$2x_{\overrightarrow{GH}} = 2 \times (-1) = -2 = x_{\overrightarrow{GK}}$$

$$2y_{\overrightarrow{GH}} = 2 \times 0 = 0 = y_{\overrightarrow{GK}}$$

$$2z_{\overrightarrow{GH}} = 2 \times 0 = 0 = z_{\overrightarrow{GK}}$$

On a donc : $\overrightarrow{GK} = 2\overrightarrow{GH}$, donc $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GK}$ sont colinéaires par conséquent les trois points G, H, K sont alignés, autrement dit $K \in (GH)$.

Rappel de la figure

