Exercice

Soit f la fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x : $f(x) = xe^{x-1} + 1$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$: que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, en déduire que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion et en préciser les coordonnées.

Partie B Recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a qui passe par l'origine du repère.

On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

1. Montrer que T_a passe par l'origine du repère si et seulement si : $1 - a^2e^{a-1} = 0$.
2. Justifier que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation :

$$1 - x^2e^{x-1} = 0$$

3. On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au points d'abscisse 1.
  a. Donner l'équation réduite de T.
  b. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T.

Partie C Équation $f(x) = 1,5$

On note (E) l'équation $f(x) = 1{,}5$ où $x \in \mathbb{R}$.

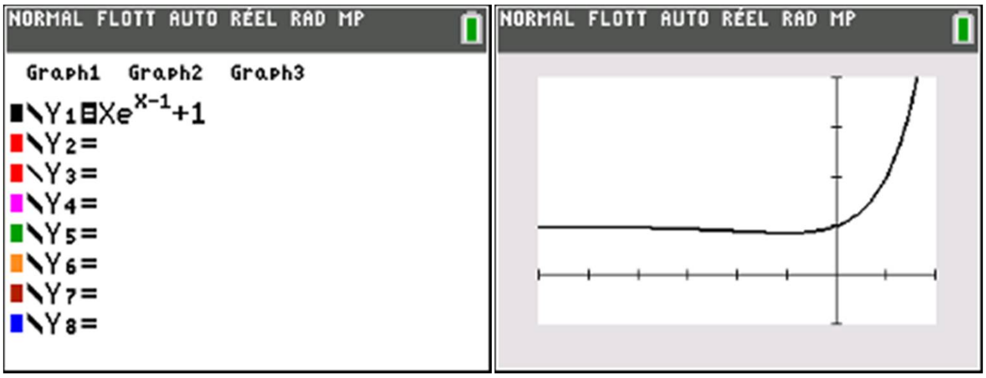
1. a. Montrer que (E) admet exactement une solution dans l'intervalle $[-1; 1]$.
On note β cette solution.
  b. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de β d'amplitude $0{,}001$.
2. Justifier que β est l'unique solution de (E) dans $\mathbb{R}$.

Corrigé

Exercice Etude de fonction

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x : $f(x) = xe^{x-1} + 1$

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.



Partie A

1. Limite de f en $-\infty$ et conséquence pour $\mathcal{C}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (cours), donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x \times e^{-1}) = 0$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x + 1) = 1$.

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$.

On en déduit que **la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de** $-\infty$.

2. Limite de f en $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc par limite d'un produit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x \times e^{-1}) = +\infty$, puis : $\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x \times e^{-1} + 1) = +\infty$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = +\infty$.

3. Calcul de $f'(x)$ et $f''(x)$

$f(x) = xe^{x-1} + 1$

Rappels : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^u)' = u'e^u$

$f'(x) = 1 \times e^{x-1} + 1e^{x-1} \times x + 0$

$f'(x) = (1 + x)e^{x-1}$

$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x + 1)e^{x-1}}$

$f''(x) = 1 \times e^{x-1} + 1e^{x-1} \times (x + 1)$

$f''(x) = [1 + 1(x + 1)]e^{x-1}$

$f''(x) = (x + 2)e^{x-1}$

$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (x + 2)e^{x-1}}$

4. Tableau de variation de f

Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x + 1)e^{x-1}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}, e^a > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{x-1} > 0$ par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $x + 1$.

On a l'équivalence : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Règle : « $ax + b$ est dusigne de a à droite de sa racine ».

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Sens de variation de f	1	$\searrow$	$1-\dfrac{1}{e^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = (-1)e^{(-1)-1} + 1 = -e^{-2} + 1 = 1 - \dfrac{1}{e^2}$

5. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, en déduire que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion, en préciser les coordonnées.

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (x+2)e^{x-1}$
Pour tout $a \in \mathbb{R}, e^a > 0$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui de $x+2$.
On a l'équivalence : $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Pour tout $x \in]-\infty; -2]$, $x + 2 \leqslant 0$ donc $f''(x) \leqslant 0$: **f est concave sur $]-\infty;-2]$**,
pour tout $x \in [-2;+\infty[$, $x+2 \geqslant 0$ donc $f''(x) \geqslant 0$: **f est convexe sur $[-2;+\infty[$**.
La fonction f change de convexité en (-2) donc le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse (-2) est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$. On a : $f(-2) = (-2)e^{(-2)-1} + 1 = -2e^{-3} + 1$.
Le point de coordonnées $(\mathbf{-2};\ \mathbf{-2e^{-3}+1})$ est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

<u>Partie B</u> Recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. Montrer que T_a passe par l'origine du repère si et seulement si : $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

La tangente T_a admet pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, qui s'écrit aussi :
$y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ (équation réduite), donc l'ordonnée à l'origine de T_a est : $f(a) - f'(a) \times a$.
Or, $f(a) = ae^{a-1} + 1$ et $f'(a) = (a+1)e^{a-1}$ donc l'ordonnée à l'origine de T_a est :
$ae^{a-1} + 1 - (a+1)e^{a-1} \times a = ae^{a-1} + 1 - (a^2+a)e^{a-1} = e^{a-1}(a - a^2 - a) + 1$
$= -a^2e^{a-1} + 1 = 1 - a^2e^{a-1}$

Résumons : l'ordonnée à l'origine de T_a est $1 - a^2e^{a-1}$.

Or, une droite non verticale passe par l'origine du repère si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle, donc :
T_a passe par l'origine du repère si et seulement si $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

2. Justifier que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de : $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

Posons, pour $x \in]0;+\infty[$, $h(x) = 1 - x^2e^{x-1}$.
On a : $h(1) = 1 - 1^2e^{1-1} = 1 - 1e^0 = 1 - 1 \times 1 = 0$ donc 1 est une solution de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$. Pour tout $x > 0$, $h(x) = 1 - x^2e^{x-1}$, donc :
$h'(x) = 0 - (2xe^{x-1} + 1e^{x-1}x^2)$
$h'(x) = -e^{x-1}(x^2 + 2x)$

Pour tout $x \in \,]0; +\infty[$, $x > 0$, $x^2 + 2x > 0$, $e^{x-1} > 0$ donc : $-e^{x-1}(x^2 + 2x) < 0$ par conséquent h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc elle inverse le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle.

Procédons par disjonction de cas :
- si $0 < x < 1$, alors : $h(x) > h(1)$, or $h(1) = 0$, donc $h(x) > 0$, donc : $h(x) \neq 0$
- si $x = 1$, alors : $h(x) = 0$
- si $x > 1$, alors : $h(x) < h(1)$, or $h(1) = 0$, donc $h(x) < 0$, par conséquent $h(x) \neq 0$.

Il résulte des trois points précédents que l'équation $h(x) = 0$ n'admet que 1 comme solution sur $]0; +\infty[$.

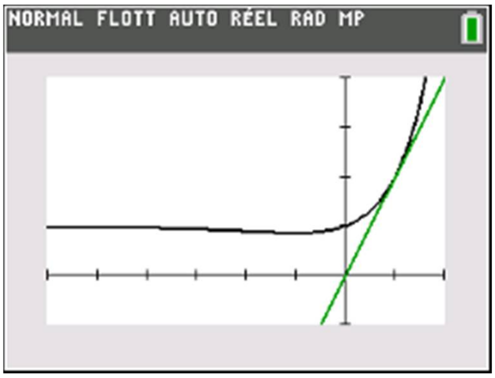
Conclusion : $\mathbf{1 - x^2 e^{x-1} = 0}$ **admet 1 pour unique solution sur** $\mathbf{]0; +\infty[}$.

3. On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au points d'abscisse 1.

a. Équation réduite de T

T admet pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
Or, pour tout $x > 0$ on a :
$f(x) = xe^{x-1} + 1$, donc : $f(1) = 1e^{1-1} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$
$f'(x) = (x + 1)e^{x-1}$, donc : $f'(1) = (1 + 1)e^{1-1} = 2e^0 = 2 \times 1 = 2$
On obtient : $y = 2(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow y = 2x$.
La tangente T admet pour équation réduite : $\boldsymbol{y = 2x}$.

b. Position relative de $\mathcal{C}$ et T



Procédons par disjonction de cas :
- **si $x \geqslant -2$**

On a vu dans la question 5 partie A que f est convexe sur $[-2; +\infty[$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus (au sens large) de toutes ses tangentes sur cet intervalle, en particulier $\mathcal{C}$ est au-dessus (au sens large) de T sur $[-2; +\infty[$.

- **si $x < -2$**

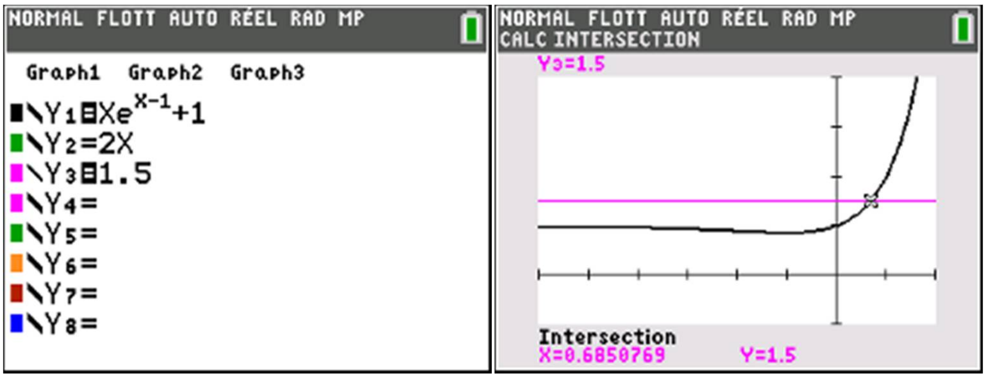
D'une part, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,; 1]$ donc en particulier sur $]-\infty; -2[$ donc elle inverse le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle.
Si $x < -2$ alors : $f(x) > f(-2)$, or $f(-2) \approx 0{,}9$ donc $f(x) > 0$.
Résumons : sur $]-\infty; -2[$, $f(x) > 0$ $(*)$.
D'autre part, si $x < -2$ alors, en multipliant par $2 > 0$, on obtient : $2x < -4$, donc : $2x < 0$, par conséquent les points de T ont une ordonnée strictement négative.
Sur $]-\infty; -2[$ les points de T ont une ordonnée strictement négative $(**)$.

Il résulte de $(*)$ et $(**)$ que sur $]-\infty;-2[$, $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de T.

Conclusion
Il résulte des deux points précédents que $\mathcal{C}$ est au-dessus (sens large) de T sur $\mathbb{R}$.

Partie C Équation $f(x) = 1,5$

On note (E) l'équation $f(x) = 1,5$.



1. a. **Montrer que (E) admet exactement une solution dans l'intervalle $[-1;1]$.**
On note β cette solution.
Remarquons que :
• f est dérivable sur $[-1;1]$ donc elle est continue sur $[-1;1]$
• f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ donc elle est strictement croissante sur $[-1;1]$, donc elle est strictement monotone sur cet intervalle
• $f(-1) = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,86 < 1,5$ et $f(1) = 1e^{1-1} + 1 = e^0 + 1 = 2 > 1,5$

Résumons :
• f est continue sur $[-1;1]$
• f est strictement monotone sur $[-1;1]$
• 1,5 est compris entre $f(-1)$ et $f(1)$
donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on en déduit que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une et une seule solution dans $[-1;1]$.

Conclusion : **(E) admet exactement une solution, notée β, dans $[-1;1]$.**

b. **À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de β d'amplitude $0,001$.**
$f(0,6) \approx 1,4 < 1,5$ et $f(0,7) \approx 1,52 > 1,5$ donc $0,6 < \beta < 0,7$
$f(0,68) \approx 1,4938 < 1,5$ et $f(0,69) \approx 1,5061 > 1,5$ donc : $0,68 < \beta < 0,69$
$f(0,685) \approx 1,4999 < 1,5$ et $f(0,686) \approx 1,5011 > 1,5$ donc : $0,685 < \beta < 0,686$

Conclusion
Un encadrement de β d'amplitude 0,001 est : $\mathbf{0,685 < \beta < 0,686}$.

2. **Justifier que β est l'unique solution de (E) dans $\mathbb{R}$.**

On procède par disjonction de cas :

• recherche d'une solution dans $]-\infty;-1[$
f est décroissante sur $]-\infty;-1[$ et la limite en $-\infty$ de f est 1 donc pour tout $x \in]-\infty;-1[$ on a : $f(x) \leqslant 1$, or $1 < 1,5$ donc : $f(x) = 1,5$ n'a pas de solution dans $]-\infty;-1[$

• solution dans $[-1;1]$
On a vu à la question précédente que l'équation $f(x)=1,5$ admet sur cet intervalle une unique solution β.

• recherche d'une solution dans $]1;+\infty[$
f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ donc elle est strictement croissante sur $]1;+\infty[$, par conséquent elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle.
Or, pour tout $x \in]1;+\infty[$, on a : $x>1$ donc $f(x)>f(1)$, or $f(1)=2>1,5$ donc $f(x)>1,5$ par conséquent l'équation $f(x)=1,5$ n'a pas de solution dans $]1;+\infty[$

Conclusion : β est l'unique solution de $(E) : f(x)=1,5$ sur $\mathbb{R}$.