Term Spé Maths DM 3 **Thiaude P.**

Exercice 1 Etude d'une suite numérique

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{6}{x+1}$$

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 5 - \frac{6}{u_n + 1}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Résoudre dans $[1;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$; on note α la solution.

2. Étudier le sens de variation de f sur $[1;+\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

4. **a.** Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

b. Justifier que

$$\ell = 5 - \frac{6}{\ell + 1}$$

En déduire ℓ.

5. Le programme suivant écrit en Python détermine le plus petit entier naturel n_0 tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-8}$: écrire sur la copie, en les complétant, les lignes 02, 05, 07 et 08.

```
01 from math import *
02 alpha= …
03 U=1
04 n=0
05 while abs(U-alpha) …
06    n=n+1
07    U=…
08 print("n0=",…
```

Faire tourner le programme, en déduire n_0.

Exercice 2 Limites de fonctions

Déterminer chacune des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x} - e^x + 3)$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x+5}$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 + 1}\right)$

Corrigé

Exercice 1 **Etude d'une suite numérique**

$\forall \boldsymbol{x} \in [1;+\infty[, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{5} - \dfrac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}$

$\boldsymbol{u_0} = \mathbf{1}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n}) = \mathbf{5} - \dfrac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{u_n}+\mathbf{1}}$

1. **Résoudre dans l'intervalle $[1;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$; on note α la solution.**

   On a les équivalences

   $$5 - \frac{6}{x+1} = x \Leftrightarrow \frac{5(x+1)-6}{x+1} = x \Leftrightarrow 5x+5-6 = x(x+1) \; et \; x+1 \neq 0$$
   $$\Leftrightarrow 5x - 1 = x^2 + x \; et \; x \neq -1 \Leftrightarrow 5x - 1 - x^2 - x = 0 \; et \; x \neq -1$$
   $$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0 \; et \; x \neq -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \; et \; x \neq -1$$
   $$\Leftrightarrow x^2 - 2(x)(2) + 2^2 - 4 + 1 = 0 \; et \; x \neq -1 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 3 = 0 \; et \; x \neq -1$$
   $$\Leftrightarrow (x-2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0 \; et \; x \neq -1 \Leftrightarrow \left(x - 2 - \sqrt{3}\right)\left(x - 2 + \sqrt{3}\right) = 0 \; et \; x \neq -1$$
   $$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \; ou \; x = 2 - \sqrt{3}$$

   Or $2 + \sqrt{3} \geqslant 1$ et $2 - \sqrt{3} < 1$ donc dans $[1; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}}$.

2. **Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.**

   $f(x) = 5 - \dfrac{6}{x+1}$

   Rappel : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

   $f'(x) = 0 - \dfrac{0(x+1) - 1(6)}{(x+1)^2}$

   $f'(x) = \dfrac{6}{(x+1)^2}$

   Un carré est toujours positif ou nul donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur : 6, donc $\forall x \in [1;+\infty[, f'(x) > 0$ donc $\boldsymbol{f}$ **est (strictement) croissante sur $[1;+\infty[$.**

3. **Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on considère la proposition P_n : « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ».

   • <u>initialisation</u>

   $u_0 = 1$

   $u_1 = f(u_0) = 5 - \dfrac{6}{u_0 + 1} = 5 - \dfrac{6}{1+1} = 5 - \dfrac{6}{2} = 5 - 3 = 2$

   et $\alpha = 2 + \sqrt{3}$

   Or, $1 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 2 + \sqrt{3}$ donc : $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$ par conséquent P_0 est vraie.

   • <u>hérédité</u>

   Supposons vraie P_k : « $1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \alpha$ » pour un certain entier naturel k (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha$ » est vraie.

   On a : $1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \alpha$ (H.R.) Or,f est croissante sur $[1; +\infty[$ donc elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent :

   $$f(1) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(\alpha)$$

   Or : $f(1) = 2, f(u_k) = u_{k+1}, f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et α est solution de $f(x) = x$ donc

$f(\alpha) = \alpha$, par conséquent l'inégalité précédente s'écrit donc : $2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha$ et comme $1 \leqslant 2$ on en déduit : $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha$ par conséquent P_{k+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha}$.

4. a. **Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.**

Il résulte de la question précédente que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$, donc la suite (u_n) est croissante
- pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \alpha$, donc la suite (u_n) est majorée par la constante α

La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone **elle est convergente**.

b. **Justifier que**

$$\boldsymbol{\ell = 5 - \frac{6}{\ell + 1}}$$

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5 - \frac{6}{u_n + 1}$$

Or,

d'une part : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{N \to +\infty} u_N = \ell$

et d'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + 1) = \ell + 1 \neq 0$

donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{5}{u_n + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{\ell + 1}$$

puis limite d'une différence

$$\lim_{n \to +\infty} \left(5 - \frac{6}{u_n + 1}\right) = 5 - \frac{6}{\ell + 1}$$

Par passage à la limite de $(*)$, on obtient :

$$\ell = 5 - \frac{6}{\ell + 1}$$

c'est-à-dire $\ell = f(\ell)$ avec $\ell \geqslant 1$ donc $\boldsymbol{\ell = \alpha = 2 + \sqrt{3}}$.

5. Le programme suivant écrit en Python détermine le plus petit entier naturel n_0 tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-8}$. Écrire sur la copie, en les complétant, les lignes 02, 05 et 07.

```
01 from math import *
02 alpha=2+sqrt(3)
03 U=1
04 n=0
05 while abs(U-alpha)>=10**(-8):
06   n=n+1
07   U=5-6/(U+1)
08 print("n0=",n)
```

En faisant tourner ce programme, on obtient : $\boldsymbol{n_0 = 16}$.

<u>Exercice 3</u> Limites de fonctions

1. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-e^x+3)}$

Pour tout réel x, on a :

$$e^{2x}-e^x+3=e^x\left(e^x-1+\frac{3}{e^x}\right)$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\ (cours)$, donc par limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x}=0$ puis par limite d'une somme et d'une différence : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1+\frac{3}{e^x}\right)=+\infty$, enfin par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^x-1+\frac{3}{e^x}\right)\right]=+\infty$

<u>Conclusion</u> $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-e^x+3)}=+\infty$

2. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x+5}}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x+5)=+\infty$,
d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x+5}=\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty\ (cours)$

<u>Conclusion</u> $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x+5}}=+\infty$

3. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)}$

On a, pour tout réel $x\geqslant 0$:

$$\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+1}=\frac{(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+1})(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+1})}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+1}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+1}}=\frac{2x^2+x+1-(2x^2+1)}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+1}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2}\times\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{x}{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{x\times 1}{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$, de même $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2}$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

<u>Conclusion</u>

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}}$$