<u>Exercice 1</u> **Suite de Héron d'Alexandrie**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

On note f la fonction définie sur $\mathcal{D} =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On admet que f est dérivable sur $\mathcal{D}$. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, donner le sens de variation de f sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

3. a. Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$.

b. Démontrer par récurence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

4. a. Démontrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, on a : $f(x) \leqslant x$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

5. Montrer que (u_n) est convergente, justifier que sa limite ℓ est strictement positive puis déterminer la valeur de ℓ.

6. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|^2$$

Cette dernière inégalité explique la convergence particulièrement rapide de (u_n) vers sa limite.

<u>Exercice 2</u> **Intersection d'une droite et d'un plan**

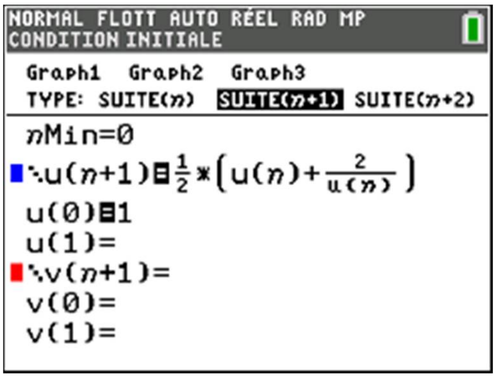
On munit l'espace d'un repère.
On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $-4x + 7y + 3z = 14$, $\mathcal{D}$ est droite passant par $E(2; -1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants, préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

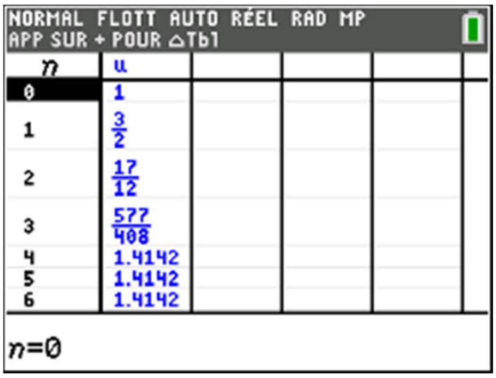
Corrigé

Exercice 1 **Suite de Héron d'Alexandrie**

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

f **fonction définie sur** $\mathcal{D} =]0; +\infty[$ **par :** $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$





1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}(2+1) = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{2}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{9+8}{6} = \mathbf{\frac{17}{12}}$$

2. On admet que f est dérivable sur $\mathcal{D}$. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, donner le sens de variation de f sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Rappel : $(ku)' = k \times u'$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{0(x) - 1(2)}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{2x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul et $2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

Si $x \geqslant \sqrt{2}$, alors $x - \sqrt{2} \geqslant 0$ et $x + \sqrt{2} > 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$

Conclusion

f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

3. a. Calculer $f(\sqrt{2})$.

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}}$$

b. Démontrer par récurence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la poposition P_n : « $u_n \geqslant \sqrt{2}$ ».

• <u>initialisation</u>
$u_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ et $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ donc $u_1 \geqslant \sqrt{2}$: P_1 est vraie

• <u>hérédité</u>
Supposons vraie P_k : « $u_k \geqslant \sqrt{2}$ » pour un certain entier naturel k (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} \geqslant \sqrt{2}$ « est vraie.
On a : $u_k \geqslant \sqrt{2}$ (hypothèse de récurrence)
Or, f est croissante sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$ donc conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent : $f(u_k) \geqslant f(\sqrt{2})$.

Or, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ donc : $u_{k+1} \geqslant \sqrt{2}$ donc P_{k+1}est donc vraie.

<u>Conclusion</u>
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$ est vraie, autrement dit : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{u_n} \geqslant \sqrt{\mathbf{2}}$.

4. **a. Démontrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$ on a : $f(x) \leqslant x$.**
Soit $x \geqslant \sqrt{2}$, on a :

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - x = \frac{x^2+2}{2x} - \frac{2x^2}{2x} = \frac{-x^2+2}{2x} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - x^2}{2x} = \frac{\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)}{2x}$$

Or $x \geqslant \sqrt{2}$, donc : $0 \geqslant \sqrt{2} - x$ autrement dit : $\sqrt{2} - x \leqslant 0$, et comme $\sqrt{2} + x$ et $2x > 0$ on en déduit que : $f(x) - x \leqslant 0$, autrement dit : $f(x) \leqslant x$.

<u>Conclusion</u> :
Pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, on a : $f(x) \leqslant x$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$, or $u_n \geqslant \sqrt{2}$ et pour $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$ donc $f(u_n) \leqslant u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc **(u_n) est décroissante à partir du rang 1**.

5. **Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.**
On a montré que, à partir du rang 1 : la suite (u_n) est décroissante et est minorée par $\sqrt{2}$, donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.
Notons ℓ sa limite et rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \quad (*)$$

On a d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{N\to+\infty} u_N = +\infty$
d'autre part il résulte des règles de calculs sur les limites que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$$

Par passage à la limite de l'égalité $(*)$ on a :

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \Leftrightarrow 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell} \Leftrightarrow \ell = \frac{2}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell = -\sqrt{2} \;\; ou \;\; \ell = \sqrt{2}$$

Or, $\ell > 0$, donc $\boldsymbol{\ell} = \sqrt{\mathbf{2}}$.

6. **a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$\boldsymbol{u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}=\frac{u_n^2-2u_n\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{2u_n}=\frac{u_n^2+2-2u_n\times\sqrt{2}}{2u_n}=\frac{u_n^2+2}{2u_n}-\frac{2u_n\times\sqrt{2}}{2u_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{u_n^2+2}{u_n}-\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2}{u_n}+\frac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}=u_{n+1}-\sqrt{2}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}}$$

b. En déduire que, pour tout $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*$:

$$\boldsymbol{\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\times\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On a vu en **3.b.** que : $u_n\geqslant\sqrt{2}$, d'où en multipliant par $2>0$: $2u_n\geqslant 2\sqrt{2}$,
puis en prenant l'inverse :

$$\frac{1}{2u_n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

enfin, en multiplinat par $\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2\geqslant 0$:

$$\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}\leqslant\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}$$

Or,

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$$

donc :

$$u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2\quad(*)$$

Rappelons que si $a\geqslant 0$, alors $|a|=a$, or $u_{n+1}-\sqrt{2}$ et $u_n-\sqrt{2}$ sont positifs ou nuls donc $(*)$ s'écrit :

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2$$
$$\Leftrightarrow\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2$$
$$\Leftrightarrow\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2$$

Conclusion :
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\boldsymbol{\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2}$$

<u>Exercice 2</u> **Intersection d'une droite et d'un plan**

On munit l'espace d'un repère.

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $-4x+7y+3z=14$, $\mathcal{D}$ est droite passant par $E(2;-1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants, préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

Une représenttaion paramétrique de $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+2\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$$

Dire que $M(x;y;z) \in \mathcal{D}$ et à $\mathcal{P}$ revient à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 1+3\lambda \\ -4x+7y+3z = 14 \end{cases}$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 1+3\lambda \\ -4x+7y+3z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 1+3\lambda \\ -4(2+\lambda)+7(-1+2\lambda)+3(1+3\lambda) = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ -8-4\lambda-7+14\lambda+3+9\lambda = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ 19\lambda = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\dfrac{26}{19} \\ y = -1+2\left(\dfrac{26}{19}\right) \\ z = 1+3\left(\dfrac{26}{19}\right) \\ \lambda = \dfrac{26}{19} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{38}{19}+\dfrac{26}{19} \\ y = \dfrac{-19}{19}+\dfrac{52}{19} \\ z = \dfrac{19}{19}+\dfrac{78}{19} \\ \lambda = \dfrac{26}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{64}{19} \\ y = \dfrac{33}{19} \\ z = \dfrac{97}{19} \\ \lambda = \dfrac{26}{19} \end{cases}$$

Il existe donc un et un seul point commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$, ses coordonnées sont :

$$\boldsymbol{\left(\frac{64}{19};\frac{33}{19};\frac{97}{19}\right)}$$

La droite $\mathcal{D}$ et les le plan $\mathcal{P}$ sont donc sécants, en ce point.