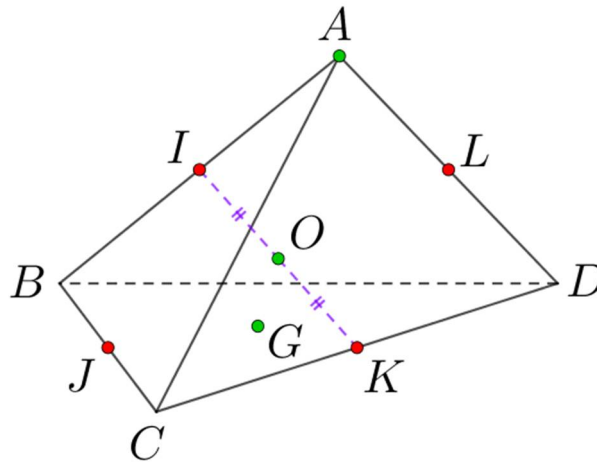


Problème

Soit $ABCD$ un tétraèdre, on note :

I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[CD]$, L le milieu de $[DA]$, O le milieu de $[IK]$ et enfin G le centre de gravité du triangle BCD

c'est-à-dire le point vérifiant $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$.



On souhaite déterminer la nature du quadrilatère $IJKL$ et si les points A , O et G sont ou non alignés.

On propose deux méthodes à traiter indépendamment l'une de l'autre.

Méthode n°1 Utilisation d'un repère de l'espace

On munit l'espace du repère $\mathcal{R} = (C; \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

1. Donner sans justification les coordonnées de C , D , B et A .
2. En déduire les coordonnées de I , J , K et L , en déduire la nature de $IJKL$.
3. Déterminer les coordonnées de G et celles de O : les points A , O et G sont-ils alignés ?

Méthode n°2 Vecteurs purs

1. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, en déduire la nature de $IJKL$.
2. a. Justifier que :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$$

- b. Justifier que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, en déduire : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
- c. Les points A , O et G sont-ils alignés ?

Corrigé

Méthode n°1 Utilisation d'un repère de l'espace

1. $C(0; 0; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $A(0; 0; 1)$

2. I est le milieu de $[AB]$ donc :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

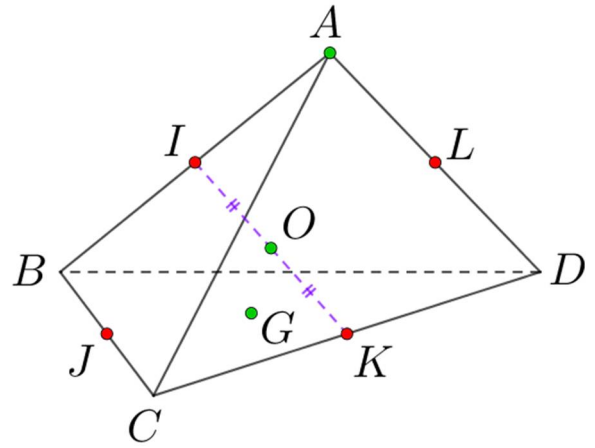
$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

Finalement : $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

De même, on obtiendrait :

$$J\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), K\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \text{ et } L\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$



3. Nature du quadrilatère $IJKL$

$\vec{IJ}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et $\vec{LK}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_K - x_L \\ y_K - y_L \\ z_K - z_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 - 0 \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{LK}$ ont mêmes coordonnées donc ils sont égaux.

On a : $\vec{IJ} = \vec{LK}$ donc **$IJKL$ est un parallélogramme.**

4. • coordonnées de G

On sait que : $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BK}$.

Or, $\vec{BG}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \\ z_G - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G - 0 \\ y_G - 1 \\ z_G - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G - 1 \\ z_G \end{pmatrix}$$

et $\frac{2}{3} \vec{BK}$ a pour coordonnées :

$$\frac{2}{3} \begin{pmatrix} x_K - x_B \\ y_K - y_B \\ z_K - z_B \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \times (-1) \\ \frac{2}{3} \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

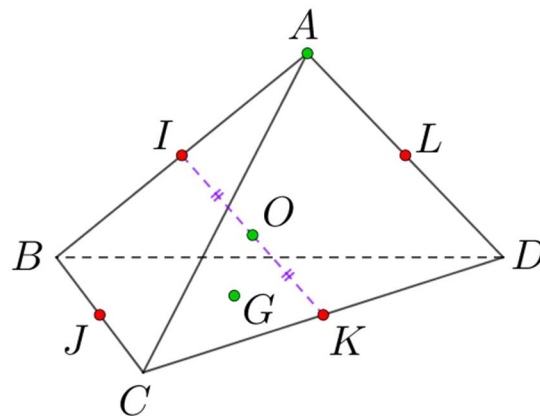
Donc :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3} \\ y_G - 1 = -\frac{2}{3} \\ z_G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{1}{3} \\ z_G = 0 \end{cases}$$

• **coordonnées de O**

O est le milieu de $[IK]$ donc O a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \frac{x_I + x_K}{2} \\ \frac{y_I + y_K}{2} \\ \frac{z_I + z_K}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} \\ \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} \\ \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



• **montrons que A , O et G sont alignés**

$\overrightarrow{AO}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_O - x_A \\ y_O - y_A \\ z_O - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 0 \\ \frac{1}{4} - 0 \\ \frac{1}{4} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{1}{3} - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ a donc pour coordonnées :

$$\frac{3}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

On constate que les vecteurs $\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AO}$ ont mêmes coordonnées donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$.

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AG}$, à savoir $k = \frac{3}{4}$, donc $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, et comme trois points seulement sont impliqués, **A , O et G , on en déduit que ces trois points sont alignés.**

Méthode n°2 Vecteurs purs

1. $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$ (Chasles), or I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ (Chasles)}$$

Finalement : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (*). On montrerait de même que : $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (**).

Nature de $IJKL$

Il résulte de (*) et (**) que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc **$IJKL$ est un parallélogramme.**

2. a. Justifier que : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$

On a :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK}) \text{ (Chasles)}$$

$$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AO} + \vec{0}) \text{ (O milieu de [IK])} = \overrightarrow{AO}$$

On a donc bien : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AK}$

b. Justifier que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, en déduire : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= -\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KD} \text{ (Chasles)} \\ &= -\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{GK} + \vec{0} \text{ (K milieu de [CD])} \\ &= -\overrightarrow{BG} + 2(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BK}) \text{ (Chasles)} \\ &= -\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BK} \\ &= -3\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{BK} \\ &= -3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BK}\right) + 2\overrightarrow{BK} \text{ (on sait que : } \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}\text{)} \\ &= -2\overrightarrow{BK} + 2\overrightarrow{BK} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

On a donc bien : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (**).

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \text{ (Chasles)} \\ &= 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \\ &= 3\overrightarrow{AG} + \vec{0} \text{ (avec (**))} \\ &= 3\overrightarrow{AG} \end{aligned}$$

On a donc bien : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

c. Les points A, O et G sont-ils alignés ?

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} \text{ (d'après a.)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} \text{ (I milieu de [AB])} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \text{ (K milieu de [CD])} \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{4}(3\overrightarrow{AG}) \text{ (d'après b.)} \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} \end{aligned}$$

Résumons : $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AG}$, à savoir $k = \frac{3}{4}$, donc $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, et comme trois points seulement sont impliqués, **A, O et G**, on en déduit que **ces trois points sont alignés**.