CS 05 Spécialité maths **Vendredi 11 Avril 2024** **Thiaude P.**

Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 1h30**

<u>Exercice 1</u> [3 points]

On considère les équations différentielles (E) : $y' = -2y + 2x + 5$ et (E_0) : $y' = -2y$.

1. Donner la solution générale de (E_0).
2. Rechercher une solution particulière y_0 de (E) qui soit une fonction affine.
3. Donner la solution générale de (E).

<u>Exercice 2</u> [5 points]

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^{2x}+3}\,dx$ et $K = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; \ln 3]$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$$

Déterminer une primitive de f sur $[0; \ln 3]$, puis montrer que : $K = \frac{1}{2}\ln 3$.

2. Calculer $3I + K$, en déduire I.

<u>Exercice 3</u> [5 points]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1. Calculer $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une intégration par parties exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Calculer I_1 et I_2, puis $J = \int_0^1 (x^2 - x)e^{-x}\,dx$.

<u>Exercice 4</u> [4 points]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$ on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$$

3. Justifier que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

<u>Exercice 5</u> [3 points]

En utilisant à un moment une intégration par parties, calculer :

$$I = \int_0^{\pi} |x\cos(x)|\,dx$$

Corrigé

Exercice 1

1. **Solution générale de (E_0) : $y' = -2y$**

   L'équation différentielle $y' = -2y$ est de la forme $y' = \alpha y$ avec $\alpha = -2$, dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\alpha x}$, C constante réelle.

   Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions $x \mapsto \boldsymbol{Ce^{-2x}}$, C constante réelle.

2. **Solution particulière y_0 de (E) qui soit une fonction affine**

   Dire que y_o est une fonction affine c'est dire qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout réel x, $y_0(x) = ax + b$.

   On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) = a$.

   Avec les notations précédentes on a les équivalences :

   y_0 est une solution de $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) = -2y(x) + 2x + 5$

   $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a = -2(ax + b) + 2x + 5 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a = -2ax - 2b + 2x + 5$

   $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 0x + a = (-2a + 2)x - 2b + 5$

   Par identification :

   $$\begin{cases} -2a + 2 = 0 \\ -2b + 5 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2b + 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

   Conclusion :

   (E) admet pour unique solution affine la fonction y_0 telle que : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y_0(x) = x + 2}$.

   Vérification

   - $y_0'(x) = 1$
   - $-2y_0(x) + 2x + 5 = -2(x + 2) + 2x + 5 = -2x - 4 + 2x + 5 = 1$

   On a donc bien :$\forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) = -2y_0(x) + 2x + 5$

3. **Solution générale de (E)**

   D'après le cours : « solution générale de (E) = une solution particulière de (E) + solution générale de (E_0) ». Or, la solution générale de (E_0) est $x \mapsto Ce^{-2x}$ et une solution particulière de (E) est $y_0 : x \mapsto x + 2$ donc en notant y la solution générale de (E), on a :$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = x + 2 + Ce^{-2x}$, C constante réelle.

   Conclusion : la solution générale de (E) s'écrit $\boldsymbol{y = Ce^{-2x} + x + 2}$.

Exercice 2

$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^{2x} + 3}\, dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}\, dx$$

1. Pour tout $x \in [0\,; \ln 3]$, on pose : $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$.

   a. **Déterminer une primitive de f sur $[0\,; \ln(3)]$.**

   Pour tout $x \in [0\,; \ln\ 3]$, on pose : $u(x) = e^{2x} + 3$, d'où : $u'(x) = 2e^{2x}$.

   On a, pour tout $x \in [0\,; \ln(3)]$:

   $$f(x) = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Donc : $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Or une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, $u > 0$ sur l'intervalle considéré, est $\ln(u)$ donc en notant F une primitive de f sur $[0\,;\ln(3)]$, on a : $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\big(u(x)\big)$.

$\boldsymbol{\forall x \in [0\,;\ln(3)]\,,\, F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)}$

b. Montrer que $\boldsymbol{K = \dfrac{1}{2}\ln(3)}$.

On a : $K = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx = \int_0^{\ln 3} f(x)dx$

Or, f est continue sur $[0\,;\ln(3)]$, donc :

$$\int_0^{\ln 3} f(x)dx = [F(x)]_0^{\ln 3} = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)\right]_0^{\ln 3}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\big(e^{2\ln 3}+3\big) - \frac{1}{2}\ln\big(e^{2(0)}+3\big) = \frac{1}{2}\ln\Big(\big(e^{\ln 3}\big)^2+3\Big) - \frac{1}{2}\ln(e^0+3)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(3^2+3) - \frac{1}{2}\ln(1+3) = \frac{1}{2}\ln(12) - \frac{1}{2}\ln(4) = \frac{1}{2}(\ln(12)-\ln(4))$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{12}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln(3)$$

Résumons : $\boldsymbol{K = \dfrac{1}{2}\ln 3}$.

2. Calculer $\boldsymbol{3I + K}$, en déduire $\boldsymbol{I}$.

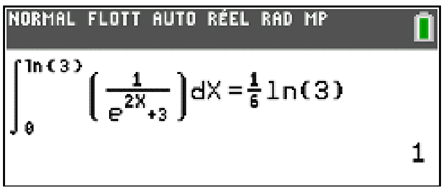
$$3I + K = 3\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^{2x}+3}\,dx + \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$$
$$= \int_0^{\ln 3} \frac{3}{e^{2x}+3}\,dx + \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx = \int_0^{\ln 3} \left(\frac{3}{e^{2x}+3} + \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\right)dx$$
$$= \int_0^{\ln 3} \frac{3+e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}+3}{e^{2x}+3}\,dx = \int_0^{\ln 3} 1\,dx = [x]_0^{\ln 3} = \ln(3) - 0$$
$$= \ln(3)$$

Résumons : $\boldsymbol{3I + K = \ln 3}$.

Or, on a montré que $K = \dfrac{1}{2}\ln(3)$, donc :

$$3I + \frac{1}{2}\ln(3) = \ln(3) \Leftrightarrow 3I = \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(3) \Leftrightarrow 3I = \frac{1}{2}\ln(3) \Leftrightarrow I = \frac{1}{6}\ln(3)$$

Conclusion : $\boldsymbol{I = \dfrac{1}{6}\ln(3)}$.



Exercice 3

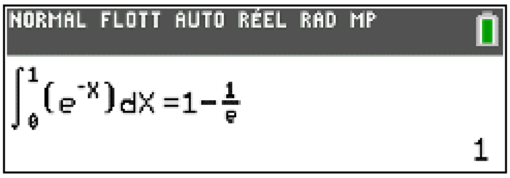
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

1. **Calculer $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx$.**

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[0; 1]$ et l'une de ses primitives est $x \mapsto -e^{-x}$ donc :

$$I_0 = [-e^{-x}] = -e^{-1} + e^{-0} = -\frac{1}{e} + 1$$

$$\boldsymbol{I_0 = 1 - \frac{1}{e}}$$



2. **Soit $n \in \mathbb{N}$, en intégrant par parties I_{n+1}, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_{u(x)}\ \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)}\ dx$.

On pose :

$u(x) = x^{n+1}$ $\qquad$ $u'(x) = (n+1)x^n$

$v'(x) = e^{-x}$ $\qquad$ $v(x) = -e^{-x}$ convient

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc on peut utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx = [x^{n+1}(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{-x})\,dx$$

$$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$$

$$I_{n+1} = -1^{n+1}e^{-1} + 0^{n+1}e^{-0} + (n+1)I_n$$

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}}$$

3. a. **Calculer I_1 et I_2.**

Pour $n = 0$, la relation de récurrence obtenue à la question précédente donne :

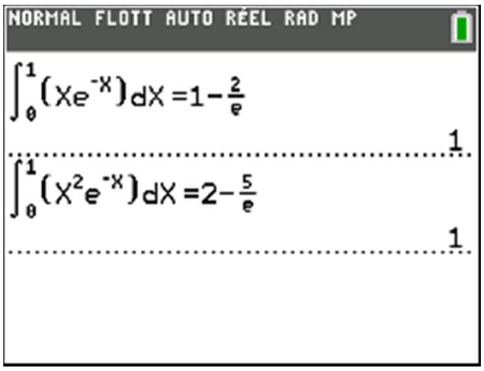
$$I_1 = I_0 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\boldsymbol{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

Puis pour $n = 1$, on obtient :

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) - \frac{1}{e} = 2 - \frac{4}{e} - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e}$$

$$\boldsymbol{I_2 = 2 - \frac{5}{e}}$$

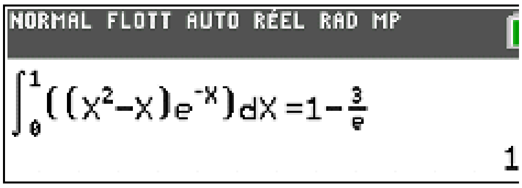


b. Calculer : $J = \int_0^1 (x^2 - x)e^{-x}\,dx$.

$$J = \int_0^1 (x^2 - x)e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x^2e^{-x} - xe^{-x})\,dx = \int_0^1 x^2e^{-x}\,dx - \int_0^1 xe^{-x}\,dx$$

$$= I_2 - I_1 = 2 - \frac{5}{e} - \left(1 - \frac{2}{e}\right) = 2 - \frac{5}{e} - 1 + \frac{2}{e} = 1 - \frac{3}{e}$$

$$\boldsymbol{J = 1 - \frac{3}{e}}$$



Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que, pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$\boldsymbol{1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1}$$

On a $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0;1]$.

- **montrons que : $1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$**

$$1 - x^n - \frac{1}{1+x^n} = \frac{(1-x^n)(1+x^n)}{1+x^n} - \frac{1}{1+x^n} = \frac{1^2 - (x^n)^2 - 1}{1+x^n} = \frac{-x^{2n}}{1+x^n}$$

$x \in [0;1]$ donc $x \geqslant 0$, $x^{2n} \geqslant 0$, $-x^{2n} \leqslant 0$, $1 + x^{2n}$ donc : $\frac{-x^{2n}}{1+x^n} \leqslant 0$.

$1 - x^n - \frac{1}{1+x^n} \leqslant 0$, donc : $1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$.

- **montrons que : $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$**

$$\frac{1}{1+x^n} - 1 = \frac{1}{1+x^n} - \frac{1+x^n}{1+x^n} = \frac{1-(1+x^n)}{1+x^n} = \frac{-x^n}{1+x^n}$$

Or, $x \in [0;1]$, donc $x \geqslant 0$, $x^n \geqslant 0$, $-x^n \leqslant 0$, $1 + x^n > 0$, donc : $\frac{-x^n}{1+x^n} \leqslant 0$.

On a : $\frac{1}{1+x^n} - 1 \leqslant 0$, autrement dit $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$, donc : $1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$.

Résumons :

$$\boldsymbol{\forall x \in [0;1],\ 1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$

On a montré à la question précédente que :

$$\forall x \in [0;1],\ 1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

Donc, en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

$$\int_0^1 (1 - x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_0^1 1\,dx$$

Or, $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\, dx$, donc :

$$\left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant [x]_0^1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1^{n+1}}{n+1} - \left(0 - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right) \leqslant I_n \leqslant 1 - 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$$

On a donc : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1}$.

3. La suite (I_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative préciser sa limite.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N} = 0$ puis par limite d'une différence : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

On a donc :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que la suite (I_n) est convergente et que sa limite est 1 : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1}$.

Exercice 5

$$I = \int_0^{\pi} |x\cos(x)|\, dx$$

Rappelons que : si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$ et si $a < 0$, alors $|a| = -a$.

Tableau d'étude :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	$+$	$-$
$x\cos(x)$	$+$	$-$
$\|x\cos(x)\|$	$x\cos(x)$	$-x\cos(x)$

$$I = \int_0^{\pi} |x\cos(x)|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x\cos(x)|\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |x\cos(x)|\, dx \ (Chasles)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -x\cos(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(x)\, dx$$

$I = I_1 - I_2$ avec $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\, dx$ et $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(x)\, dx$

• **Calcul de** $\boldsymbol{I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx}$

On pose

$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos(x) \qquad v(x) = \sin(x)$ convient

u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\sin(x)\,dx$$

Donc :

$I_1 = [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\sin(0) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right)$

$= \frac{\pi}{2} - 0 + 0 - 1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$

• **Calcul de** $\boldsymbol{I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(x)\,dx}$

De même, les fonctions u' et v' étant continues sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\sin(x)\,dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

Donc :

$$I_2 = \pi\sin(\pi) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \times 0 - \frac{\pi}{2} \times 1 - 1 - 0 = \boldsymbol{-\frac{\pi}{2} - 1}$$

Or $I = I_1 - I_2$, donc :

$$I = \frac{\pi}{2} - 1 - \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} + 1 = \pi$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boldsymbol{I = \int_0^{\pi} |x\cos(x)|\,dx = \pi}$$