CS 04 Spécialité maths **Vendredi 14 Février 2024** **Thiaude P.**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 50 min**

Exercice 1 [4 points]
Résoudre l'équation : $\ln(-x+7) = \ln(2x+1) + \ln(x+1)$.

Exercice 2 [8 points]

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(1+x) - x$.
On admet que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

a. Déterminer le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.
b. En déduire que : $\forall x \in [0;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$.
On admet que g est dérivable sur $[0;+\infty[$.

a. Déterminer le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.
b. En déduire que : $\forall x \in [0;+\infty[, x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x)$.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout $x > 0$:

$$1 - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$$

4. En déduire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Exercice 3 [8 points]
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} =]0;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x) - 1$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

2. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$.

3. **a.** Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.
b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
On admet que α est l'unique solution dans $\mathcal{D}$ de l'équation $f(x) = 0$.

4. On note A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisse et T la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

a. Justifier que T admet pour équation réduite : $y = \frac{\alpha+1}{\alpha}x - 1 - \alpha$.
b. Étudier la position relative, au sens large, de $\mathcal{C}$ et T.

Corrigé

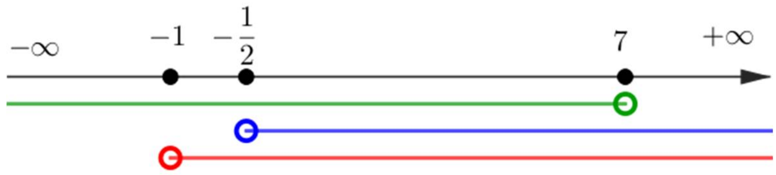
Exercice 1

Résoudre l'équation : $\ln(-x+7) = \ln(2x+1) + \ln(x+1)$.

• domaine d'existence de l'équation

Il faut que $-x+7>0$, $2x+1>0$ et $x+1>0$. Or on a les équivalences :

$$\begin{cases} -x+7>0 \\ 2x+1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x>-7 \\ 2x>-1 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ x>-1 \end{cases}$$



Le domaine d'existence de l'équation est donc : $\boldsymbol{\mathcal{D} = \left]-\frac{1}{2};7\right[}$

• résolution

Rappel : $a>0$ et $b>0$: $\ln(ab) = \ln(a)+\ln(b)$ et $\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b$.

Pour $x \in \mathcal{D}$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
&\ln(-x+7) = \ln(2x+1)+\ln(x+1) \\
&\Leftrightarrow \ln(-x+7) = \ln[(2x+1)(x+1)] \\
&\Leftrightarrow \ln(-x+7) = \ln(2x^2+2x+x+1) \\
&\Leftrightarrow \ln(-x+7) = \ln(2x^2+3x+1) \\
&\Leftrightarrow -x+7 = 2x^2+3x+1 \\
&\Leftrightarrow 2x^2+4x-6 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2+2(x)(1)+1^2-1-3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+1)^2-2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+1+2)(x+1-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x+3=0 \text{ ou } x-1=0 \\
&\Leftrightarrow x=-3 \text{ ou } x=1
\end{aligned}$$

$-3 \notin \mathcal{D} = \left]-\frac{1}{2};7\right[$ donc $x=-3$ est refusé, $1 \in \mathcal{D} = \left]-\frac{1}{2};7\right[$ donc $x=1$ est accepté.

Conclusion :

L'équation de départ admet pour unique solution : 1.

On peut aussi résoudre $x^2+2x-3=0$ par la méthode du discriminant.

x^2+2x-3 est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$, $b=2$ et $c=-3$,

de discriminant : $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4(1)(-3) = 4+12 = 16$

$\Delta>0$ donc x^2+2x-3 admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2(1)} = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2(1)} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

etc.

__Exercice 2__

1. $\forall x \in [0;+\infty[$ **par :** $f(x) = \ln(1+x) - x$**,** f **est dérivable sur** $[0;+\infty[$

   a. **Déterminer le sens de variation de** f **sur** $[0;+\infty[$**.**

   $f(x) = \ln(1+x) - x$

   Rappel : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

   $u(x) = 1 + x \qquad u'(x) = 1$

   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1$

   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1+x}{1+x}$

   $f'(x) = \dfrac{1-(1+x)}{1+x}$

   $f'(x) = \dfrac{-x}{1+x}$

   $x \in [0;+\infty[$ donc $x \geqslant 0$, $-x \leqslant 0$ et $1 + x \geqslant 1 > 0$ donc $f'(x) \leqslant 0$

   $\forall x \in [0;+\infty[$, $f'(x) \leqslant 0$ donc f **est décroissante sur** $[0;+\infty[$

   b. **En déduire que :** $\forall x \in [0;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$**.**

   Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $0 \leqslant x$ et f est décroissante sur $[0;+\infty[$ donc $f(0) \geqslant f(x)$.

   Or, $f(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln(1) - 0 = 0 - 0 = 0$ donc : $0 \geqslant \ln(1+x) - x$

   autrement dit : $x \geqslant \ln(1+x)$.

   __Conclusion__

   $\forall x \in [0;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.

2. $\forall x \in [0;+\infty[$ **par :** $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{1}{2}x^2$**,** g **est dérivable sur** $[0;+\infty[$

   a. **Déterminer le sens de variation de** g **sur** $[0;+\infty[$**.**

   On obtient :

   $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + \dfrac{1}{2} \times 2x$

   $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x$

   $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1+x}{1+x} + \dfrac{x(1+x)}{1+x}$

   $g'(x) = \dfrac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x}$

   $g'(x) = \dfrac{1-1-x+x+x^2}{1+x}$

   $g'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

   Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $x^2 \geqslant 0$ et $1 + x > 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$ par conséquent g **est croissante sur** $[0;+\infty[$.

   b. **En déduire que :** $\forall x \in [0;+\infty[, x - \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x)$**.**

   Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $0 \leqslant x$ et g est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $g(0) \leqslant g(x)$

Or, $g(0) = \ln(1+0) - 0 + \frac{1}{2}0^2 = \ln(1) - 0 + 0 = 0 - 0 + 0 = 0$ donc $0 \leqslant g(x)$

Donc : $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leqslant \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$, i.e. : $x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x)$

<u>Conclusion</u> : $\forall x \in [0; +\infty[, \ln(1+x) \geqslant x - \frac{1}{2}x^2$.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\mathbf{1 - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1}$$

Soit $x > 0$, alors $x \geqslant 0$ donc d'après **1.** et **2.** on en déduit :

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

En multipliant par $\frac{1}{x}$ qui est strictement positif, on obtient :

$$\left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \times \frac{1}{\mathrm{x}} \leqslant \ln(1+x) \times \frac{1}{x} \leqslant x \times \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \times x \times \frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant x \times \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$$

On a donc bien :

$$\forall \boldsymbol{x} > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{1 - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1}$$

4. En déduire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1$.

<u>Résumons</u> :

On a :

$$\begin{cases} \forall x > 0, 1 - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1 \end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \mathbf{1}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x) - 1$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. **Déterminer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$.**

   On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln(x) = 0$ (cours) donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (x\ln(x) - 1) = -1$.

   Résumons : $\mathbf{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -1}$.

   On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ (cours) donc par limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$,
   d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\ln(x) - 1) = +\infty$.

   Résumons : $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. **Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.**

   $f(x) = x\ln(x) - 1$

   Rappels : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

   $f'(x) = 1 \times \ln(x) + \dfrac{1}{x} \times x - 0$

   $f'(x) = \ln(x) + 1$

   Conclusion :
   $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \ln(x) + 1$

   Cherchons pour quelles valeurs de x on a $\ln(x) + 1 > 0$:

$$\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

   On en déduit que :
   • $f'(x) > 0$ sur $]e^{-1}\,;\,+\infty[$ et f est continue sur $[e^{-1};+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[e^{-1};+\infty[$
   • $f'(x) < 0$ sur $]0\,;e^{-1}[$ et f est continue sur $]0;e^{-1}]$ donc f est strictement décroissante sur $]0;e^{-1}]$.
   Comme de plus :

$$f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) - 1 = e^{-1} \times (-1) - 1 = -\frac{1}{e} - 1$$

   on obtient finalement le tableau de variation :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Sens de variation de f	‖ -1	$\searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) - 1 = e^{-1} \times (-1) - 1 = -\frac{1}{e} - 1 = -1 - \frac{1}{e}$$

3. **a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.**

• f est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc elle est continue sur cet intervalle, or $[1;2] \subset]0;+\infty[$ donc f est continue sur $[1;2]$

• f est strictement croissante sur $[e^{-1};+\infty[$ et $[1;2] \subset [e^{-1};+\infty[$ donc f est strictement monotone sur $[1;2]$

• $f(1) = 1\ln(1) - 1 = 1 \times 0 - 1 = -1 < 0$ et $f(2) = 2\ln(2) - 1 \approx 0{,}4 > 0$ donc 0 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$

Résumons

f est continue et strictement monotone sur $[1;2]$ et 0 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in [1;2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

$f(1{,}7) \approx -0{,}098 < 0$ et $f(1{,}8) \approx 0{,}058$ donc $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$
$f(1{,}76) \approx -0{,}005 < 0$ et $f(1{,}77) \approx 0{,}0106$ donc $1{,}76 < \alpha < 1{,}77$
$f(1{,}763) \approx -3 \times 10^{-3} < 0$ et $f(1{,}764) \approx 0{,}0012 > 0$ donc $1{,}763 < \alpha < 1{,}764$

Vérification

Les fonctions avancées de la calculatrice donnent $\alpha \approx 1{,}763\,222\,8$ ce qui est accord avec notre encadrement.

4. **A est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisse et T la tangente à $\mathcal{C}$ en A.**

a. Justifier que T admet pour équation réduite : $y = \frac{\alpha+1}{\alpha}x - 1 - \alpha$.

Le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé donc le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $f'(\alpha)$.
Or, $f'(\alpha) = \ln(\alpha) + 1$.
D'autre part, $f(\alpha) = 0$, donc $\alpha\ln(\alpha) - 1 = 0$ autrement dit $\alpha\ln(\alpha) = 1$ ou encore $\ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, par conséquent le coefficient directeur de T est égal à $\frac{1}{\alpha} + 1$,
Une équation de T est : $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$
On obtient :

$$y = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)(x - \alpha) + 0$$
$$y = \frac{\alpha + 1}{\alpha}x - \frac{1 + \alpha}{\alpha} \times \alpha$$
$$y = \frac{\alpha + 1}{\alpha}x - (1 + \alpha)$$
$$\boldsymbol{y = \frac{\alpha + 1}{\alpha}x - 1 - \alpha}$$

b. Position relative de $\mathcal{C}$ et T.

Soit $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) + 1$ donc $f''(x) = \frac{1}{x}$, et comme $x > 0$ on a : $\frac{1}{x} > 0$
$\forall x \in]0;+\infty[$, $f''(x) > 0$ donc f est convexe sur $]0;+\infty[$, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de T.

Conclusion : **$\mathcal{C}$ est au-dessus (au sens large) de T.**