CS 03 Spécialité maths **Lundi 9 décembre 2024** **Gr Thiaude P.**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 30 min**

Exercice 1 [3 points]
Un restaurant propose trois entrées différentes, cinq plats chauds différents et quatre desserts différents : combien de repas différents comportant une entrée, un plat chaud et un dessert ce restaurant peut-il proposer ?

Exercice 2 [3 points]
Dans une classe de 29 élèves, on souhaite en désigner 4 qui iront ensemble intervenir auprès des élèves de seconde pour les informer de la nature de la spécialité maths.
De combien de façons différentes peut-on choisir ces 4 élèves ?

Exercice 3 [4 points]
Pour tout réel x, $f(x) = (x^2 - x + 5)e^x$: déterminer la limite de f en $-\infty$.

Exercice 4 [4 points]
Pour tout réel x, $f(x) = xe^{-2x+1}$: déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 5 [4 points]
Pour tout $x \geqslant -1$, $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$: déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 6 [2 points]
Le nombre 121111221 est écrit à partir de six chiffre 1 et trois chiffre 2, ainsi que le nombre 121211121.

1. Combien de nombres différents peut-on écrire à partir de six chiffre 1 et trois chiffre 2 ?
2. Pour combien d'entre eux les trois 2 ne sont pas tous écrits l'un a côté de l'autre, comme par exemple, pour 122121111 et pour 212112111 ?

BONUS [1 point]

Déterminer :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

Corrigé

Exercice 1

Un restaurant propose trois entrées différentes, cinq plats chauds différents et quatre desserts différents : combien de repas différents comportant une entrée, un plat chaud et un dessert ce restaurant peut-il proposer ?

Il y a 3 choix possibles pour l'entrée, 5 choix possibles pour le plat chaud et enfin 4 choix possibles pour le dessert.

Les choix se multiplient donc il y a : $3 \times 5 \times 4 = \mathbf{60}$ **repas possibles**.

Exercice 2

Dans une classe de $\mathbf{29}$ élèves, on souhaite en désigner $\mathbf{4}$ qui iront ensemble intervenir auprès des élèves de seconde pour les informer de la nature de la spécialité maths. De combien de façons différentes peut-on choisir ces $\mathbf{4}$ élèves ?

Les quatre élèves constituent une partie à 4 éléments de l'ensemble des 29 élèves de la classe : il y a donc $\binom{29}{4}$ façons de les choisir. On a :

$$\binom{29}{4} = \frac{29!}{4!\,25!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 25!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 23\,751$$

Il y a : $\mathbf{23\,751}$ **façons de procéder**.

Exercice 3

Pour tout réel $\boldsymbol{x}$, on pose : $\boldsymbol{f(x) = (x^2 - x + 5)e^x}$: déterminer la limite de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{-\infty}$.

On a, pour tout réel x : $f(x) = x^2e^x - xe^x + 5e^x$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0\ (cours)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0\ (cours)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0\ (cours)$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 5e^x = 0$. Par limite d'une somme on en déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2e^x - xe^x + 5e^x) = 0$.

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 4

Pour tout réel $\boldsymbol{x}$, on pose : $\boldsymbol{f(x) = xe^{-2x+1}}$: déterminer la limite de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{+\infty}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = xe^{-2x}e^1 = -\frac{e}{2} \times (-2x)e^{-2x}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [(-2x)e^{-2x}] = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0\ (cours)$

Puis par limite d'un produit :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{e}{2} \times (-2x)e^{-2x}\right) = 0$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 5

Pour tout $\boldsymbol{x \geqslant -1}$, on pose : $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$: déterminer la limite de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{+\infty}$.

Pour tout $x \geqslant -1$, on a :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{x + 2 - (x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+2} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty\ (cours)$

de même, $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

Par limite d'une somme on en déduit $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)=+\infty$ puis par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=0$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$.

<u>Exercice 6</u>

Le nombre 121111221 est écrit à partir de six chiffre 1 et trois chiffre 2, ainsi que le nombre 121211121.

1. **Combien de nombres différents peut-on écrire à partir de six chiffre 1 et trois chiffres 2 ?**

   <u>Méthode 1</u>

   Un tel nombre est une anagramme du « mot » 121111221 : ce « mot » est formé de 9 lettres dont 6 « lettre » 1 et 3 « lettres » 2 donc il y a $\frac{9!}{6!3!}$ anagrammes.

   Or :

   $$\frac{9!}{6!\,3!}=\frac{9\times8\times7\times6!}{6!\times3\times2\times1}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

   Il y a donc $\mathbf{84}$ **tels nombres**.

   <u>Méthode 2</u>

   Il y a 9 places possibles numérotées de 1 à 9. On peut choisir successivement, sans répétition et sans ordre les 6 numéros des places qui vont contenir le chiffre 1 : $\binom{9}{6}$ choix possibles, puis écrire automatiquement ces places par le chiffre 1 (une seule façon de procéder) puis remplir automatiquement les autres places (une seule façon de procéder) donc il y a $\binom{9}{6}$ tels nombres. On a :

   $$\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\,3!}=\frac{9\times8\times7\times6!}{6!\,(3\times2\times1)}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

   Il y a donc $\mathbf{84}$ **tels nombres**.

2. **Pour combien d'entre eux les trois 2 ne sont pas tous écrits l'un a côté de l'autre comme par exemple 122121111 ou 212112111 ?**

   Dénombrons d'abord ceux pour lesquels les trois 2 sont tous écrits l'un à côté de l'autre, ce sont les nombres : 222111111, 122211111, 112221111, 11122111, 11112211, 11111221, 11111122, il y en a donc 7. Par différence, il y a : $84-7=\mathbf{77}$ nombres pour lesquels les trois 2 ne sont pas côte à côte.

BONUS [1 pt]

Déterminer :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

Pour tout $x \neq 0$,

$$x^2 e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

On a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad (cours)$$

donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty \ (cours)$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$$