

**Exercice 1 [5 pts] Limite d'une suite**

Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$  telle que, pour tout  $n$  entier naturel :

$$u_n = \frac{n^2 + 5 \times (-1)^n}{n^2 + 1}$$

**Exercice 2 [11 pts] Suites imbriquées**

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par leurs premiers termes respectifs  $u_0 = 250$ ,  $v_0 = 50$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = 0,7u_n + 0,3v_n$  et  $v_{n+1} = 0,3u_n + 0,7v_n$ .

1. Le programme Python ci-contre affiche la liste Lu des trois premiers termes de  $(u_n)$  et la liste Lv des trois premiers termes de  $(v_n)$ .

Recopier sur la copie, en les complétant, les lignes 3 et 6 de ce programme.

2. Calculer  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$  et  $v_2$ .

3. Pour tout  $n$  entier naturel on pose :

$$a_n = u_n + v_n \text{ et } b_n = u_n - v_n.$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 300$ .
- Déterminer la nature de  $(b_n)$  puis exprimer  $b_n$  en fonction de  $n$ .
- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- Montrer que  $(u_n)$  est convergente et donner sa limite.

4. Pour tout entier naturel  $n$  on note  $S_n$  la somme des termes consécutifs de  $(u_n)$  de  $u_0$  à  $u_n$  :

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Un élève affirme que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$S_n = 150(n+1) + \frac{500}{3}(1 - 0,4^{n+1})$$

Si cette affirmation est fausse trouver un contre-exemple, sinon la démontrer.

```

1 Lu,Lv=[],[]
2 U,V=250,50
3 for k in range(0, ):
4     Lu.append(U)
5     Lv.append(V)
6     U,V=
7 print(Lu)
8 print(Lv)

```

**Exercice 3 [4 pts] Vecteurs dans l'espace [d'après Bac]**

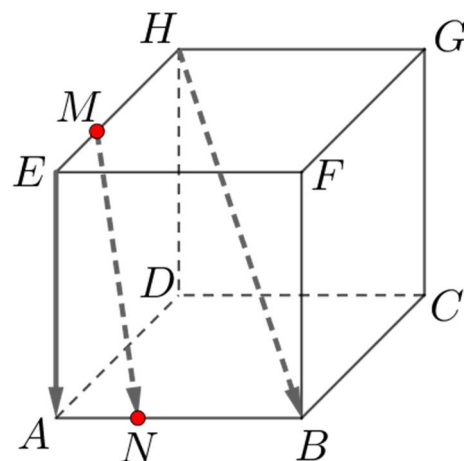
Soit  $ABCDEFGH$  un cube,  $M$  et  $N$  les points de l'espace définis par :

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

1. Démontrer que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

2. Les vecteurs  $\overrightarrow{EA}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{HB}$  sont-ils coplanaires ?



## Corrigé

### Exercice 1

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + 5 \times (-1)^n}{n^2 + 1}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$  puis en multipliant par  $5 > 0$  on obtient :

$$\begin{aligned} 5 \times (-1) &\leq 5 \times (-1)^n \leq 5 \times 1 \\ -5 &\leq 5 \times (-1)^n \leq 5 \end{aligned}$$

puis en ajoutant  $n^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -5 + n^2 &\leq 5 \times (-1)^n + n^2 \leq 5 + n^2 \\ n^2 - 5 &\leq n^2 + 5 \times (-1)^n \leq n^2 + 5 \end{aligned}$$

puis en divisant chaque membre par  $n^2 + 1$ , qui est strictement positif, chaque membre :

$$\frac{n^2 - 5}{n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + 5 \times (-1)^n}{n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + 5}{n^2 + 1}$$

donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{n^2 - 5}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{n^2 + 5}{n^2 + 1}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{n^2 \left(1 - \frac{5}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} &\leq u_n \leq \frac{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \\ \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} &\leq u_n \leq \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

On a d'une part :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2}$  (cours) donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{5}{n^2}\right] = 1$

et d'autre part :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$  (cours) donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{n^2}\right] = 1$

donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$$

De même, on montrerait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \leq u_n \leq \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1 \end{array} \right.$$

donc d'après le **théorème des gendarmes** on en déduit que  $(u_n)$  est convergente et a pour limite 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

## Exercice 2 Suites imbriquées

$u_0 = 250, v_0 = 50$ , pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 0,7u_n + 0,3v_n$  et  $v_{n+1} = 0,3u_n + 0,7v_n$ .

1. Ligne 3 for k in range(0,3) :

Ligne 6  $U,V=0.7*U+0.3*V,0.3*U+0.7*V$

2. Calculer  $u_1, v_1, u_2$  et  $v_2$ .

$$u_1 = 0,7u_0 + 0,3v_0 = 0,7 \times 250 + 0,3 \times 50 = 190$$

$$v_1 = 0,3u_0 + 0,7v_0 = 0,3 \times 250 + 0,7 \times 50 = 110$$

$$u_2 = 0,7u_1 + 0,3v_1 = 0,7 \times 190 + 0,3 \times 110 = 166$$

$$v_2 = 0,3u_1 + 0,7v_1 = 0,3 \times 190 + 0,7 \times 110 = 134$$

Résumons :  $u_1 = 190, v_1 = 110, u_2 = 166$  et  $v_2 = 134$ .

3. Pour tout  $n$  entier naturel on pose :  $a_n = u_n + v_n$  et  $b_n = u_n - v_n$ .

| NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP |        |        |  |  |
|-------------------------------|--------|--------|--|--|
| APP SUR + POUR $\Delta T b1$  |        |        |  |  |
| $n$                           | $u$    | $v$    |  |  |
| 0                             | 250    | 50     |  |  |
| 1                             | 190    | 110    |  |  |
| 2                             | 166    | 134    |  |  |
| 3                             | 156.4  | 143.6  |  |  |
| 4                             | 152.56 | 147.44 |  |  |
| 5                             | 151.02 | 148.98 |  |  |
| 6                             | 150.41 | 149.59 |  |  |
| 7                             | 150.16 | 149.84 |  |  |
| 8                             | 150.07 | 149.93 |  |  |
| 9                             | 150.03 | 149.97 |  |  |
| 10                            | 150.01 | 149.99 |  |  |

$n=0$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}, a_n = 300$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on considère la proposition  $P_n$  : «  $a_n = 300$  ».

• initialisation

$$a_0 = u_0 + v_0 = 250 + 50 = 300 \text{ donc } P_0 \text{ est vraie.}$$

• hérédité

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $P_k$  : «  $a_k = 300$  » est vraie (hypothèse de récurrence) et montrons que  $P_{k+1}$  : «  $a_{k+1} = 300$  » est vraie.

On a :  $a_k = 300$  (H.R.), ce qui s'écrit aussi :  $u_k + v_k = 300$ .

$$\text{On a : } a_{k+1} = u_{k+1} + v_{k+1} = 0,7u_k + 0,3v_k + 0,3u_k + 0,7v_k = u_k + v_k = 300.$$

Résumons :  $a_{k+1} = 300$  donc  $P_{k+1}$  est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}, P_n$  est vraie autrement dit :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 300$ .

b. Déterminer la nature de  $(b_n)$  puis exprimer  $b_n$  en fonction de  $n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$b_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = 0,7u_n + 0,3v_n - (0,3u_n + 0,7v_n) = 0,4u_n - 0,4v_n = 0,4(u_n - v_n) = 0,4b_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = 0,4 \times b_n$  et 0,4 est une constante donc  $(b_n)$  est géométrique de raison 0,4.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}, d_n = d_0 \times q^n$  avec  $b_0 = u_0 - v_0 = 250 - 50 = 200$  et  $q = 0,4$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 200 \times 0,4^n.$$

c. Exprimer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{cases} u_n + v_n = 300 \\ u_n - v_n = 200 \times 0,4^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 300 \\ 2u_n = 300 + 200 \times 0,4^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 300 \\ u_n = 150 + 100 \times 0,4^n \end{cases}$$

On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 150 + 100 \times 0,4^n$ .

d. Montrer que  $(u_n)$  est convergente et donner sa limite.

$$-1 < 0,4 < 1, \text{ or si } -1 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,4^n = 0,$$

puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (100 \times 0,4^n) = 0$  et enfin par l'imite d'une somme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (150 + 100 \times 0,4^n) = 150$ .

Résumons :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 150$ .

4. Pour tout entier naturel  $n$  :

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

Testons l'affirmation de l'élève pour  $n = 2$  :

La « formule » de l'élève donne :

$$S_2 = 150(2 + 1) + \frac{500}{3}(1 - 0,4^3) = 606 \text{ (calculatrice)}$$

Or,  $u_0 + u_1 + u_2 = 250 + 190 + 166 = 606$ .

Donc elle est vraie au moins pour  $n = 2$ .

Démontrons qu'elle est toujours vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + \dots + u_n = 150 + 100 \times 0,4^0 + \dots + 150 + 100 \times 0,4^n \\ &= 150 \times (n + 1) + 100 \times (0,4^0 + \dots + 0,4^n) = 150(n + 1) + 100 \times \frac{1 - 0,4^{n+1}}{1 - 0,4} \\ &= 150(n + 1) + 100 \times \frac{1 - 0,4^{n+1}}{0,6} = 150(n + 1) + 100 \times \frac{1 - 0,4^{n+1}}{\frac{3}{5}} \\ &= 150(n + 1) + \frac{500}{3}(1 - 0,4^{n+1}) \end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a bien :

$$S_n = 150(n + 1) + \frac{500}{3}(1 - 0,4^{n+1})$$

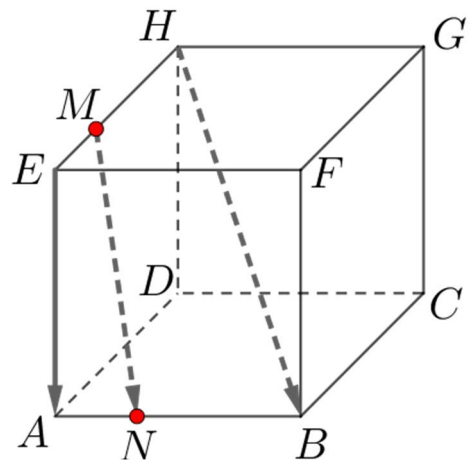
### Exercice 3 Vecteurs dans l'espace

Soit  $ABCDEFGH$  un cube,

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

1. Démontrer que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} \text{ (Chasles)} = \overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \text{ (Chasles)} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

2. Les vecteurs  $\overrightarrow{EA}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{HB}$  sont-ils coplanaires ?

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{HB}$$

L'égalité :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

donne donc :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{HB})$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

autrement dit :

$$\overrightarrow{MN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{HB} = \vec{0}$$

Il existe une combinaison linéaire non triviale de  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{EA}$  et  $\overrightarrow{HB}$  donnant  $\vec{0}$  donc

les vecteurs  $\overrightarrow{EA}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{HB}$  sont coplanaires.

