CS 01 Spécialité maths **Vendredi 4 octobre 2024** **Gr Thiaude P.**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 30 min**

Exercice 1 [5 pts]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 5 + \cos(n^2 + 1)$: déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2 [5 pts]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{3n^2 + n + 6}{n^2 + 2n + 5}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 [10 pts] [1+3+1+3+2]
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12$$

1. Calculer u_1.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel on a :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$$

3. Justifier que la suite (u_n) converge.

4. Pour tout n entier naturel on pose : $v_n = u_n - 16$.

- **a.** Déterminer v_0.
- **b.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser sa raison et exprimer v_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.
- **c.** Exprimer u_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

Exercice 1

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n + 5 + \cos(n^2 + 1)$: déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $-1 \leqslant \cos(n^2+1) \leqslant 1$ puis en ajoutant $3n+5$ à chaque membre :

$$-1 + 3n + 5 \leqslant 3n + 5 + \cos(n^2+1) \leqslant 1 + 3n + 5$$

c'est-à-dire : $3n + 4 \leqslant u_n \leqslant 3n + 6$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (3n) = +\infty$ $(cours)$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (3n+4) = +\infty$.

Résumons : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 3n + 4 \leqslant u_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (3n+4) = +\infty \end{cases}$ donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{3n^2 + n + 6}{n^2 + 2n + 5}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Pour tout $n \neq 0$, on a :

$$u_n = \frac{n^2\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}$$

On a d'une part : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (cours) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6}{n^2} = 0$ (cours) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}\right) = 3$

et d'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ (cours) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ (cours) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1$

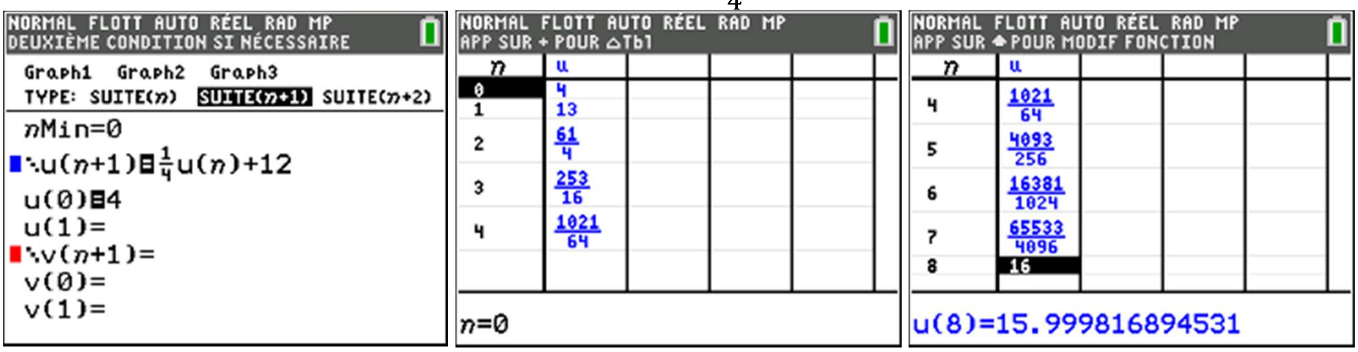
Par limite d'un quotient on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} = 3$$

autrement dit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 12$.



1. **Calculer u_1.**

   Pour $n = 0$, on obtient : $u_1 = \frac{1}{4} \times u_0 + 12 = \frac{1}{4} \times 4 + 12 = 1 + 12 = 13$.

   $\boldsymbol{u_1 = 13}$

2. **Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n : «$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$ ».

   • <u>initialisation</u> $u_0 = 4$ et $u_1 = 13$, or $4 \leqslant 4 \leqslant 13 \leqslant 20$ donc $4 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 20$: P_0 est vraie.

   • <u>hérédité</u>

   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $4 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 20$ » est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que P_{k+1} : « $4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 20$ » est vraie.

On a : $4 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 20$ (H.R.)
En multiplant par $\frac{1}{4} > 0$ on en déduit :

$$\frac{1}{4} \times 4 \leqslant \frac{1}{4} \times u_k \leqslant \frac{1}{4} \times u_{k+1} \leqslant \frac{1}{4} \times 20$$

autrement dit :

$$1 \leqslant \frac{1}{4} u_k \leqslant \frac{1}{4} u_{k+1} \leqslant 5$$

En ajoutant 12 à chaque membre, on obtient :

$$1 + 12 \leqslant \frac{1}{4} u_k + 12 \leqslant \frac{1}{4} u_{k+1} + 12 \leqslant 5 + 12$$

autrement dit :

$$13 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 17$$

donc on a :

$$4 \leqslant 13 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 17 \leqslant 20$$

d'où en particulier :

$$4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 20$$

par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie autrement dit : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20}$ $(*)$.

3. **Justifier que la suite (u_n) converge.**
Il résulte de $(*)$ que :
• $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante
• $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 20$ donc la suite (u_n) est majorée par la constante 20
La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.

4. **Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 16$.**
   a. **Déterminer v_0.**
   $v_0 = u_0 - 16 = 4 - 16 = -12$
   $\boldsymbol{v_0 = -12}$.
   b. **Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 16 = \frac{1}{4} u_n + 12 - 16 = \frac{1}{4} u_n - 4 = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{4}{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(u_n - 4 \times \frac{4}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(u_n - 16) = \frac{1}{4} v_n$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{4} \times v_n$ donc (v_n) **est géométrique de raison $\frac{1}{4}$**.

   On en déduit que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 = -12$ et $q = \frac{1}{4}$ donc :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

   c. **Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $v_n = u_n - 16$, ce qui s'écrit aussi : $u_n = v_n + 16$, or $v_n = -12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$
   donc $u_n = -12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 16$.
   $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 16}$.

5. Déterminer la limite de la suite $(\boldsymbol{u_n})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 16$.

On a : $-1 < \frac{1}{4} < 1$, or : si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, puis $\lim_{n \to +\infty} \left(-12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 0$ puis par limite d'une somme : $\lim_{n \to +\infty} (-12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 16) = 16$ autrement dit $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 16}$.

<u>Complément</u> : autre méthode pour obtenir la valeur de la limite

Notons ℓ la limite de (u_n) et rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 12$ $(*)$.

On a d'une part : $\lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{N \to +\infty} u_N = \ell$ et d'autre part :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4} u_n = \frac{1}{4}$$

Par limite d'une somme

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4} u_n + 12\right) = \frac{1}{4}\ell + 12$$

Par passage à la limite de l'égalité $(*)$ on obtient : $\ell = \frac{1}{4}\ell + 12$.

On a les équivalences :

$$\ell = \frac{1}{4}\ell + 12 \Leftrightarrow \ell - \frac{1}{4}\ell = 12 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\ell = 12$$

donc :

$$\ell = 12 \times \frac{4}{3} = 4 \times 3 \times \frac{4}{3} = 16$$

Finalement : $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 16}$.