BACCALAUREAT GENERAL

Session 2025

SPECIALITE MATHEMATIQUES

SUJET 2

DUREE DE L'EPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4
et une annexe à remettre complétée de vos nom, prénom et classe.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée dans les conditions d'examen.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.) qui comprend quatre questions.
Les questions sont indépendantes. Le candidat indiquera ***sur sa copie*** *le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions,* ***une seule des quatre réponses est exacte****.*
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

Question 1

Un groupe de 32 personnes doit former un comité de 3 membres, avec un président, un trésorier et un publicitaire : combien de comités différents peut-on former ?

a. $\binom{32}{3}$ **b.** 32^3 **c.** 3^{32} **d.** $32 \times 31 \times 30$

Question 2

Combien de nombres de six chiffres contiennent un seul chiffre 1 et exactement deux chiffres 2 et exactement trois chiffres 3, comme c'est par exemple le cas pour 331232 ?

a. 5^3 **b.** $\dfrac{6!}{2!\,3!}$ **c.** $\dfrac{6!}{(2+3)!}$ **d.** 3^5

Question 3

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 3, la somme des termes consécutifs de u_0 à u_{100} est égale à :

a. $1\,010$ **b.** $5(3^{99} - 1)$ **c.** $5(3^{100} - 1)$ **d.** $5(3^{101} - 1)$

Question 4

Combien y a-t-il de nombres à 8 chiffres tous non nuls qui contiennent exactement 3 fois le chiffre 1 ?

a. $\binom{8}{3} \times \dfrac{8!}{3!}$ **b.** $\dfrac{8!}{6}$ **c.** $9^6 - \binom{8}{3}$ **d.** $\binom{8}{3} \times 8^5$

EXERCICE 2 — 4 points

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :
- S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :
- lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98
- lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

a. À l'aide des données de l'énoncé, donner sous forme décimale $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\bar{M}}(\bar{S})$.

b. Compléter l'arbre sur l'annexe. On donnera les probabilités sous forme décimale.

c. Montrer que : $P(S) = 0{,}021\,92$.

d. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique, on arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité.
On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,021 92.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

c. Déterminer la valeur arrondie à 10^{-3} de :

• la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique

• la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

d. Déterminer la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.

EXERCICE 3 — 4 points

On a représenté en perspective cavalière, sur l'annexe, un cube $ABCDEFGH$, I est le milieu de $[CG]$, J est le milieu de $[EH]$ et on a tracé une partie de la section du cube par le plan (BIJ), on note K le point d'intersection de ce plan avec la droite (AE).

1. Compléter sur l'annexe, sans justification, le tracé de la section du cube par le plan (BIJ).

2. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a. Donner sans justification les coordonnées de B, I et J.

b. Justifier que $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.

c. En déduire que $K\left(0; 0; \frac{3}{4}\right)$.

3. Les droites (BK) et (IJ) sont-elles sécantes ? Dans l'affirmative déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

EXERCICE 4 — 5 points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

• la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$

• la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous

	A	B	C
1	Rang n	Terme u_n	Terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2. Pour les termes de rangs 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, aucune justification n'est demandée.

Partie B **Étude de la suite (u_n)**

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petite entier naturel N tel que : $u_N \geqslant 1\,000\,000$.

Partie C **Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$**

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

3. Le programme Python donné en annexe détermine le plus petit entier naturel $n \geqslant 3$ tel que :

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - 3\right| < 0{,}001$$

Compléter sur l'annexe les lignes 02 et 04.

EXERCICE 5 — 3 points

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.

Le graphique donné en annexe représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0{,}04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres. On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0{,}1\ m$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2\ m$.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par :

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0{,}04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$en fonction de t, f' désignant la fonction dérivée de la fonction f.

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 250]$.

2. On veut déterminer le temps nécessaire, en jours, pour que le plant de maïs atteigne une hauteur strictement supérieure à $1{,}5\ m$.

Pour ce faire, on utilise le programme donné en annexe.

a. Compléter sur l'annexe les lignes 03 et 04.

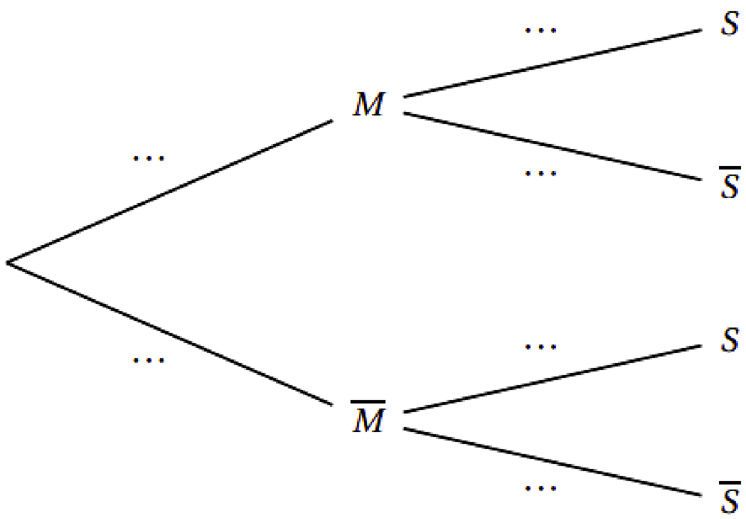
b. À l'aide de la calculatrice déterminer le nombre affiché par ce programme et en donner une interprétation concrète.

ANNEXE A COMPLETER ET RENDRE AVEC LA COPIE

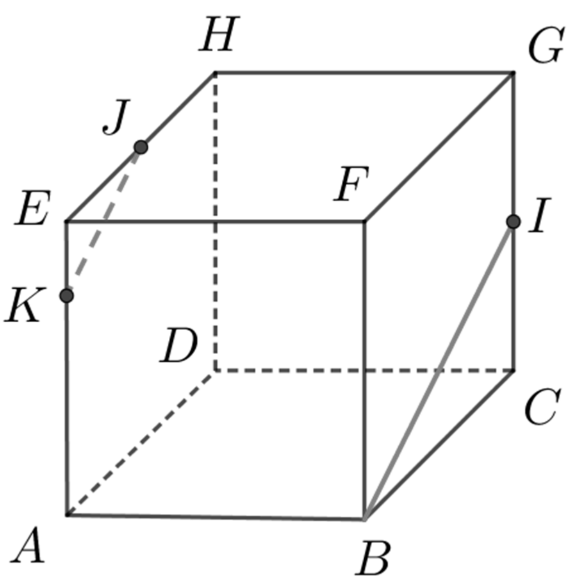
NOM : **Classe T0** ...

Prénom :

EXERCICE 2



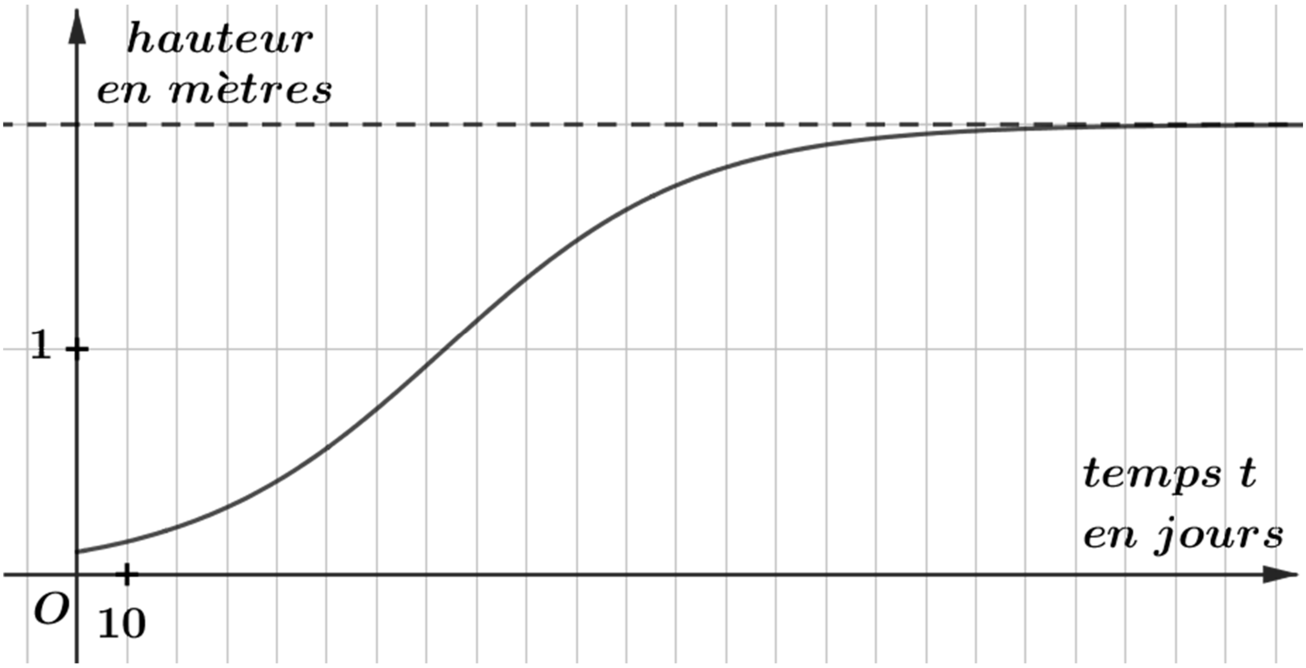
EXERCICE 3



EXERCICE 4

```
def u(n:int):
    return ...
n=3
while abs(u(n)/2**n−3) ...
    n=n+1
print("n=",n)
```

EXERCICE 5




```
from math import *
t=0
while 2/(1+19*exp(−0.04*t)) ...
    t= ...
print(t)
```

Corrigé bac blanc janvier 2025 SUJET 2 (thiaude)

EXERCICE 1

Question 1 **Réponse d**

Un groupe de 32 personnes doit former un comité de 3 membres, avec un président, un trésorier et un publicitaire : combien de comités différents peut-on former ?

a. $\binom{32}{3}$ **b.** 32^3 **c.** 3^{32} **d.** $32 \times 31 \times 30$

Il y a 32 choix pour le président puis 31 choix pour le trésorier puis 30 choix pour le publicitaire.
Les choix se multiplient.

Question 2 **Réponse b**

Combien de nombres de six chiffres contiennent un seul chiffre 1 et exactement deux chiffres 2 et exactement trois chiffres 3 comme c'est, par exemple, le cas pour 331232 ?

a. 5^3 **b.** $\dfrac{6!}{2!\,3!}$ **c.** $\dfrac{6!}{(2+3)!}$ **d.** 3^5

Il s'agit de déterminer les anagrammes du « mot » 331232 formé de 6 « lettres » avec 2 répété 2 fois et 3 répété 3 fois donc il y en a : $\dfrac{6!}{2!3!}$

Question 3 **Réponse d**

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 3, la somme des termes consécutifs de u_0 à u_{100} est égale à :

a. $1\,010$ **b.** $5(3^{99} - 1)$ **c.** $5(3^{100} - 1)$ **d.** $5(3^{101} - 1)$

On a :

$$u_0 + \cdots + u_{100} = u_0 \times \frac{1-q^{101}}{1-q} = 10 \times \frac{1-3^{101}}{1-3} = 10 \times \frac{3^{101}-1}{2} = \frac{10}{2} \times (3^{101}-1) = 5(3^{101}-1)$$

Question 4 **Réponse d**

Combien y a-t-il de nombres à 8 chiffres tous non nuls qui contiennent exactement 3 fois le chiffre 1 ?

a. $\binom{8}{3} \times \dfrac{8!}{3!}$ **b.** $\dfrac{8!}{6}$ **c.** $9^6 - \binom{8}{3}$ **d.** $\binom{8}{3} \times 8^5$

En numérotant de 1 à 8 les places des 8 chiffres, on peut choisir les trois numéros (successivement, sans répétition et sans ordre), il y a $\binom{8}{3}$ choix possibles puis, pour chacun d'entre eux il y a 8 possibilités (10 chiffres sauf le 1 et sauf 0) donc 8^5 choix. Les choix se multiplient : $\binom{8}{3} \times 8^5$.

EXERCICE 2

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :
- *S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;*
- *M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».*

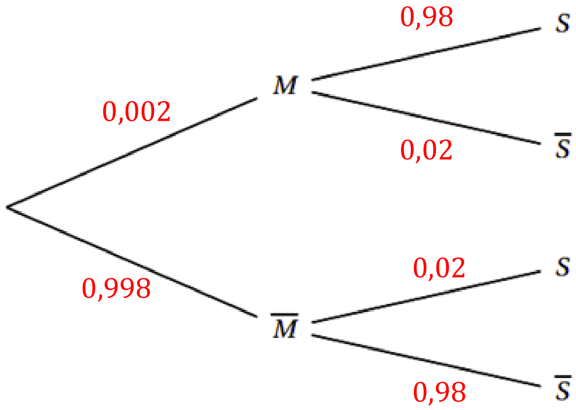
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. *On admet que :*
- *lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98*
- *lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98*

a. *À l'aide des données de l'énoncé, donner sous forme décimale $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\bar{M}}(\bar{S})$.*

$\boldsymbol{P(M) = \frac{1}{500} = 0,002}$ **et** $\boldsymbol{P_M(S) = P_{\bar{M}}(\bar{S}) = 0,98}$

b. *Compléter l'arbre sur l'annexe. On donnera les probabilités sous forme décimale.*



c. *Montrer que : $P(S) = 0{,}021\,92$.*

M et $\bar{M}$ réalisent une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(S) = P(M \cap S) + P(\bar{M} \cap S) = P(M) \times P_M(S) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(S) = 0{,}002 \times 0{,}98 + 0{,}998 \times 0{,}02 = 0{,}021\,92$

On a donc bien : $\boldsymbol{P(S) = 0,021\,92}$.

d. *En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique, on arrondira le résultat à 10^{-3}.*

Il s'agit de déterminer $P_S(M)$, or :

$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}002 \times 0{,}98}{0{,}02192} \approx 0{,}089$$

La probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique est d'environ $\boldsymbol{0,089}$ arrondi à 10^{-3}.

2. 80 *personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à* $0{,}021\,92$. *Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les* 80 *personnes de ce groupe.*

a. *Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*

On considère l'épreuve « une personne passe le portique », elle admet deux issues :

— le succès : elle fait sonner le portique, de probabilité $p = 0{,}021\,92$

— l'échec : elle ne fait pas sonner le portique, de probabilité $q = 1 - p = 0{,}978\,08$

Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}021\,92$.

On répète 80 fois avec indépendance cette épreuve et X compte le nombre de succès donc :

$\boldsymbol{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n = 80}$ et $\boldsymbol{p = 0,021\,92}$.

b. *Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.*

L'espérance d'une variable suivant la loi binomiale de paramètres n et p est np, donc :

$E(X) = 80 \times 0{,}02192 = \boldsymbol{1,753\,6}$.

Si un grand nombre de groupes de 80 personnes passent le portique, on peut s'attendre à ce que, **en moyenne, environ $\boldsymbol{1,753\,6}$ personnes fassent sonner le portique**.

c. *Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :*

• *la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique*

Rappelons d'abord que, pour tout $k \in \{0; \dots; 80\}$, on a d'après la formule du cours :

$$P(X = k) = \binom{80}{k} \times 0{,}02192^k \times 0{,}97808^k$$

L'événement « au moins une personne du groupe fasse sonner le portique » est l'événement $X \geqslant 1$.

On a :

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{80}{0} \times 0{,}02192^0 \times 0{,}97808^{80}$

$= 1 - 1 \times 1 \times 0{,}97808^{80} \approx 0{,}83$ arrondi à 10^{-3}

La probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique est **environ $\mathbf{0,83}$ arrondi à $\mathbf{10^{-3}}$**.

• *la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique*

À l'aide des valeurs de la fonction de répartition obtenues à la calculatrice : $\boldsymbol{P(X \leqslant 5) \approx 0,992}$

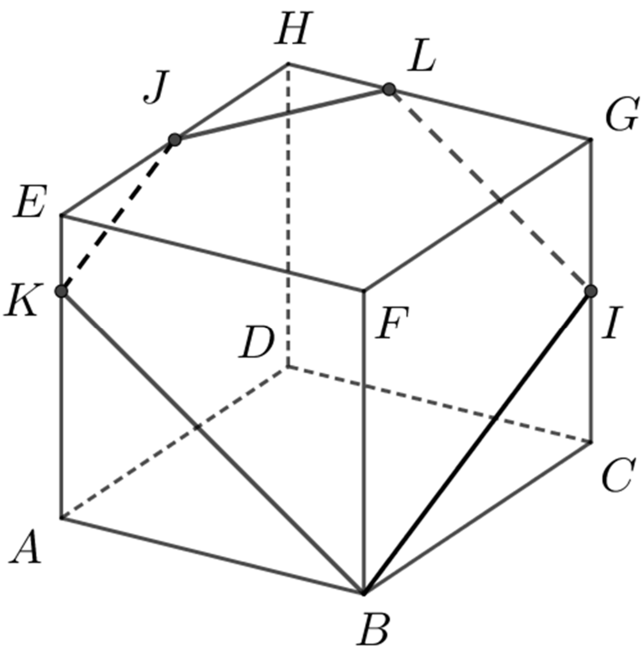
d. *Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.*

À l'aide des valeurs de la fonction de répartition obtenues à la calculatrice : $\boldsymbol{k = 3.}$

EXERCICE 3

On a représenté en perspective cavalière, sur l'annexe, un cube $ABCDEFGH$, I est le milieu de $[CG]$, J est le milieu de $[EH]$ et on a tracé une partie de la section du cube par le plan (BIJ), on note K le point d'intersection de ce plan avec la droite (AE).

1. *Compléter sur l'annexe, sans justification, le tracé de la section du cube par le plan (BIJ).*



2. *On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.*

a. *Donner sans justification les coordonnées de B, I et J.*

$\boldsymbol{B(1;0;0)}$, $\boldsymbol{I\left(1;1;\frac{1}{2}\right)}$ **et** $\boldsymbol{J\left(0;\frac{1}{2};1\right)}$

b. *Justifier que $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.*

$ABCDEFGH$ est un cube donc les plans des faces opposées $BCGF$ et $ADHE$ sont parallèles.

Or, si un plan est sécant à deux plans parallèles, alors les droites d'intersection sont parallèles, donc les droites d'intersection du plan (BIJ) avec les plans des faces $BCGF$ et $ADHE$ sont parallèles, c'est-à-dire (BI) et (JK) sont parallèles, autrement dit $\overrightarrow{BI}$ **et** $\overrightarrow{JK}$ **sont colinéaires**.

c. *Déduire de **a.** et **b.** que* $K(0;0;\frac{3}{4})$.

$K \in (AE)$ donc $x_K = y_K = 0$, par conséquent $K(0;0;z_K)$

$\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_I - x_B \\ y_I - y_B \\ z_I - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \\ z_K - z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-\frac{1}{2} \\ z_K - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ z_K - 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{JK} = \alpha\overrightarrow{BI}$, d'où :

$$\begin{cases} 0 = 0\alpha \\ -\frac{1}{2} = 1\alpha \\ z_K - 1 = \frac{1}{2}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ z_K = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ z_K = -\frac{1}{4} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ z_K = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Finalement : $\boldsymbol{K(0;0;\frac{3}{4})}$.

3. *Les droites (BK) et (IJ) sont-elles sécantes ? Dans l'affirmative déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.*

On montre facilement qu'une représentation paramétrique de (BK) est :

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{4}\lambda \end{cases}$$

et qu'une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{4}\lambda \\ x = 1 - t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{4}\lambda \\ 1 - \lambda = 1 - t \\ 0 = 1 - \frac{1}{2}t \\ \frac{3}{4}\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{4}\lambda \\ \lambda = t \\ t = 2 \\ \frac{3}{4}\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{4}\lambda \\ \lambda = 2 \\ t = 2 \\ \frac{3}{4(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{2} \\ \lambda = 2 \\ t = 2 \\ \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{2} \\ \lambda = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

Les droites (BK) et (IJ) sont donc sécantes au point de coordonnées $\boldsymbol{(-1;0;\frac{3}{2})}$.

<u>EXERCICE 4</u> **5 points**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- *la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$*
- *la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.*

Partie A Conjectures

1. *Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?*

En **B3 : « =2*B2-A2+3 »** et en **C3 : « =2*C2 »** ou **« =2^(A3) »**

2. *Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :*

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, aucune justification n'est demandée.

Il semble que : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$ **et** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3}$.

Partie B Étude de la suite (u_n)

1. *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n : « $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ ».

- <u>initialisation</u>

$3 \times 2^0 + 0 - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1$, or $u_0 = 1$ donc P_0 est vraie

- <u>hérédité</u>

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : $u_k = 3 \times 2^k + k - 2$ est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.

On a :

$$u_k = 3 \times 2^k + k - 2$$

donc :

$$2u_k = 2(3 \times 2^k + k - 2)$$
$$2u_k = 3 \times 2^{k+1} + 2k - 4$$
$$2u_k - k + 3 = 3 \times 2^{k+1} + 2k - 4 - k + 3$$
$$u_{k+1} = 3 \times 2^{k+1} + k - 1 = 3 \times 2^{k+1} + (k+1) - 2$$

donc P_{k+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n + n - 2}$.

2. *Déterminer la limite de la suite (u_n).*

On a : $2 > 1$, or si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; comme $3 > 0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 \times 2^n) = +\infty$, d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-2) = +\infty$, donc par limite d'une somme :

$$\lim_{n\to+\infty} (3 \times 2^n + n - 2) = +\infty$$

Finalement : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

3. Indiquer le rang du premier terme de la suite (u_n) dépassant un million.

À l'aide de la calculatrice, on observe que pour tout $n \in \{0; \dots; 18\}$ on a $u_n < 1\,000\,000$ et $u_{19} = 1\,572\,881$ donc le rand du premier terme de la suite dépassant un million est : $\mathbf{19}$.

Partie C Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. *Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.*

Soit n un entier naturel, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{3\times 2^{n+1}+n+1-2}{2^{n+1}} - \frac{3\times 2^n+n-2}{2^n} = \frac{3\times 2^{n+1}+n-1}{2^{n+1}} - \frac{2(3\times 2^n+n-2)}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{3\times 2^{n+1}+n-1-2(3\times 2^n+n-2)}{2^{n+1}} = \frac{3\times 2^{n+1}+n-1-3\times 2^{n+1}-2n+4}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{-n+3}{2^{n+1}}$$

Si $n \geqslant 3$, alors $-n+3 \leqslant 0$, et comme $2^{n+1} > 0$ on en déduit que : $\frac{-n+3}{2^{n+1}} \leqslant 0$.

Résumons : pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} \leqslant 0$ donc **la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3**.

2. *On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$.*

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{3\times 2^n+n-2}{2^n} = \frac{3\times 2^n}{2^n} + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n}$$

Pour $n \geqslant 4$, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$, donc :

$$0 + 3 - \frac{2}{2^n} < \frac{n}{2^n} + 3 - \frac{2}{2^n} \leqslant \frac{1}{n} + 3 - \frac{2}{2^n}$$

d'où :

$$3 - \frac{2}{2^n} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant 3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{2^n}$$

On a vu que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{2}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{2^n}\right) = 3$$

Résumons : $\begin{cases} \forall n \geqslant 4, 3 - \frac{2}{2^n} < \frac{u_n}{v_n} \leqslant 3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{2^n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{2}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{2^n}\right) = 3 \end{cases}$ donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 3 : $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3}$.

Le programme détermine le plus petit entier naturel $n \geqslant 3$ tel que : $\left|\frac{u_n}{v_n} - 3\right| < 0{,}001$.

```
02    return (3*2**N+N-2)
04 while abs(u(n)/2**n-3)>=0.001:
```

EXERCICE 5 **3 points**

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.
Le graphique donné en annexe représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres. On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1\ m$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2\ m$.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Les indications se traduisent par : $h(0) = 0,1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 2$.

D'une part, on a :

$$h(0) = \frac{a}{1 + be^{-0,04 \times 0}} = \frac{a}{1 + b \times e^0} = \frac{a}{1 + b \times 1} = \frac{a}{1 + b}$$

donc : $\frac{a}{1+b} = 0,1 \quad (*)$ et d'autre part, on a :
$-0,04 < 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} (-0,04t) = -\infty$, puis $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,04t} = \lim\limits_{T \to -\infty} e^T = 0\ (cours)$ puis par limite d'un produit, d'une somme et d'un quotient :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{a}{1 + be^{-0,04 \times t}} = \frac{a}{1 + b \times 0} = a$$

Or, l'énoncé indique que cette limite vaut 2, donc : $a = 2$.

En remplaçant dans $(*)$ on obtient :

$$\frac{2}{1 + b} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 2 \times 10 = 1 \times (1 + b) \Leftrightarrow 1 + b = 20 \Leftrightarrow b = 19$$

Finalement : $\boldsymbol{a = 2}$ et $\boldsymbol{b = 19}$.

Partie 2

On considère que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par :

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$$

1. *Déterminer $f'(t)$ en fonction de t, f' désignant la fonction dérivée de la fonction f.*
En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 250]$.

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ et $(e^u)' = u'e^u$

$$f'(t) = \frac{0(1 + 19e^{-0,04t}) - (0 + 19(-0,04)e^{-0,04t})(2)}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}$$

$$f'(t) = \frac{19 \times 0,04 \times 2e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}$$

$$f'(t) = \frac{1,52e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}$$

Or, pour tout $t \in [0; 250]$, on a $e^{-0,04t} > 0$, et $1,52 > 0$, et $(1 + 19e^{-0,04t})^2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ par conséquent **f est strictement croissante sur $[0; 250]$**.

2. *On veut déterminer le temps nécessaire, en jours, pour que le plant de maïs atteigne une hauteur strictement supérieure à* $1{,}5\ m$*. Pour ce faire, on utilise le programme donné en annexe.*

a. *Compléter sur l'annexe les lignes* 03 *et* 04*.*

```
03 while 2/(1+19*exp(−0.04*t))<=1.5 :
04      t=t+1
```

b. *À l'aide de la calculatrice déterminer le nombre affiché par ce programme et en donner une interprétation concrète.*

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $t = 102$: **c'est au bout de $\mathbf{102}$ jours que l'on observera pour la première fois que le plant de maïs atteint une hauteur strictement supérieure à $\mathbf{1,5}\ \boldsymbol{m}$.**