BACCALAUREAT GENERAL

Session 2025

SPECIALITE MATHEMATIQUES

SUJET 1

DUREE DE L'EPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4
et une annexe à remettre complétée de vos nom, prénom et classe.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée dans les conditions d'examen.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 — 4 points

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.) qui comprend quatre questions. Les questions sont indépendantes. Le candidat indiquera **sur sa copie** le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses est exacte**. Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.*

Question 1

Un groupe de 20 élèves souhaite former une équipe de 4 personnes pour réfléchir ensemble à un projet scolaire : combien d'équipes différentes peut-on constituer ?

a. 4^{20} **b.** $20 \times 19 \times 18 \times 17$ **c.** $\binom{20}{4}$ **d.** 20^4

Question 2

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BANANES ?

a. $7!$ **b.** $\dfrac{7!}{2!\,2!}$ **c.** $\dfrac{7!}{2!}$ **d.** $\dfrac{7\,!}{(2+2)\,!}$

Question 3

Une personne possède 7 CD de musique classique et 13 CD de Jazz : elle souhaite emporter pour ses vacances 4 CD, dont 2 de musique classique et 2 de Jazz.

De combien de façons peut-elle procéder ?

a. $7 \times 6 \times 13 \times 12$ **b.** $7^2 \times 13^2$ **c.** $\dfrac{7\,!}{2\,!\,5\,!} \times \dfrac{13\,!}{2\,!\,11\,!}$ **d.** $\binom{20}{7} \times \binom{20}{13}$

Question 4

Une grille est composée de cinq colonnes A, B, C, D, E et de cinq lignes numérotées 1, 2, 3, 4, 5.

De combien de façons peut-on griser au moins l'une des cases de cette grille ?

a. 2^{25} **b.** $2^{25} - 1$ **c.** $1 - 2^{25}$ **d.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}$

EXERCICE 2 — 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A

Pour un premier jeu :

• si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$

• si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement : « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.

L'internaute gagne toujours la première partie, donc $p_1 = 1$.

1. Compléter l'arbre pondéré donné en annexe.

2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on a : $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. Le programme Python donné en annexe détermine le plus petit entier naturel n tel que :

$$|p_n - 0{,}25| < 10^{-6}$$

Compléter sur l'annexe, les lignes 03 et 05.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = p_n - \frac{1}{4}$.

- **a.** Calculer v_1.
- **b.** Déterminer la nature de la suite (v_n) et en préciser la raison.
- **c.** Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
- **d.** Déterminer la limite de (p_n).

Partie B

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à $0{,}25$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
- **b.** Déterminer la probabilité que le joueur gagne exactement la moitié des 10 parties, en donner la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-3}.
- **c.** Déterminer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie, en donner la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-3}.
- **d.** Déterminer l'espérance mathématique de X.

2. Le joueur doit payer 30€ pour jouer les 10 parties.
Chaque partie gagnée lui rapporte 8€.
- **a.** Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
- **b.** Déterminer la probabilité que le joueur réalise un bénéfice supérieur à 40€, arrondie à 10^{-5}.

EXERCICE 3 — 4 points

$ABCDEFGH$ est un cube, M est le point tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et Q est le milieu de $[HG]$.

La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (MCQ) est le polygone $MCQPN$ où $P \in [EH]$ et $N \in [AE]$, non représenté sur la figure.

1. Justifier que les droites (MN) et (CQ) sont parallèles puis placer N sur l'annexe.

2. Donner sans justification la position relative des droites (CM) et (QP), puis placer P sur l'annexe et tracer le polygone $MCQPN$.

3. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
- **a.** Donner sans justification les coordonnées de M, C et Q.
- **b.** Déterminer les coordonnées de P. On admet que : $N\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$.
- **c.** Les droites (QP) et (MN) se coupent en R.
  Placer ce point sur l'annexe puis en calculer les coordonnées.

EXERCICE 4 — 7 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Préciser les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe, à compléter.

1. a. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(2 - x) - 1}{(e^x - x)^2}$$

b. En déduire que f est croissante sur $[0; 1]$.

2. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

3. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, on a :

$$f(x) - x = \frac{(1 - x)g(x)}{e^x - x}$$

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses du graphique en annexe les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

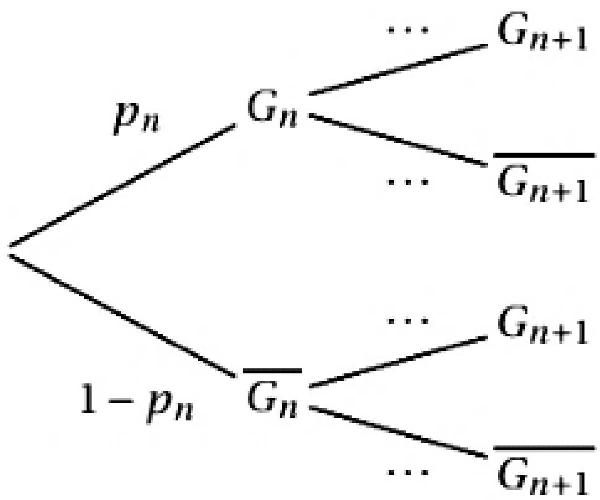
4. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

ANNEXE A COMPLETER ET RENDRE AVEC LA COPIE

NOM : **Classe T0 …**

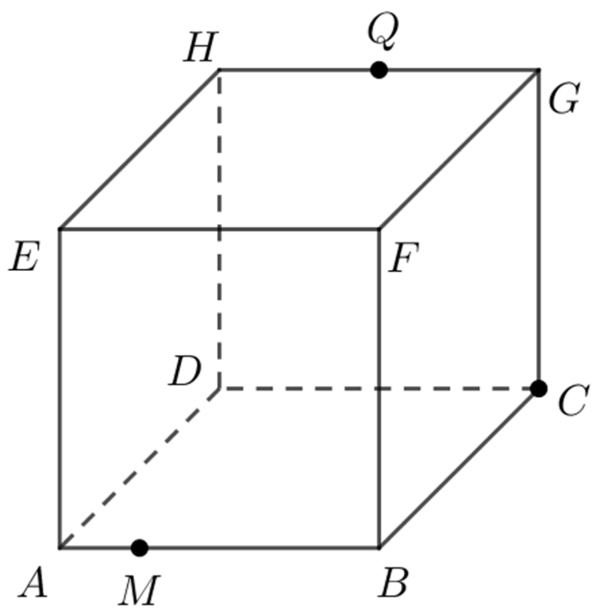
Prénom :

EXERCICE 2

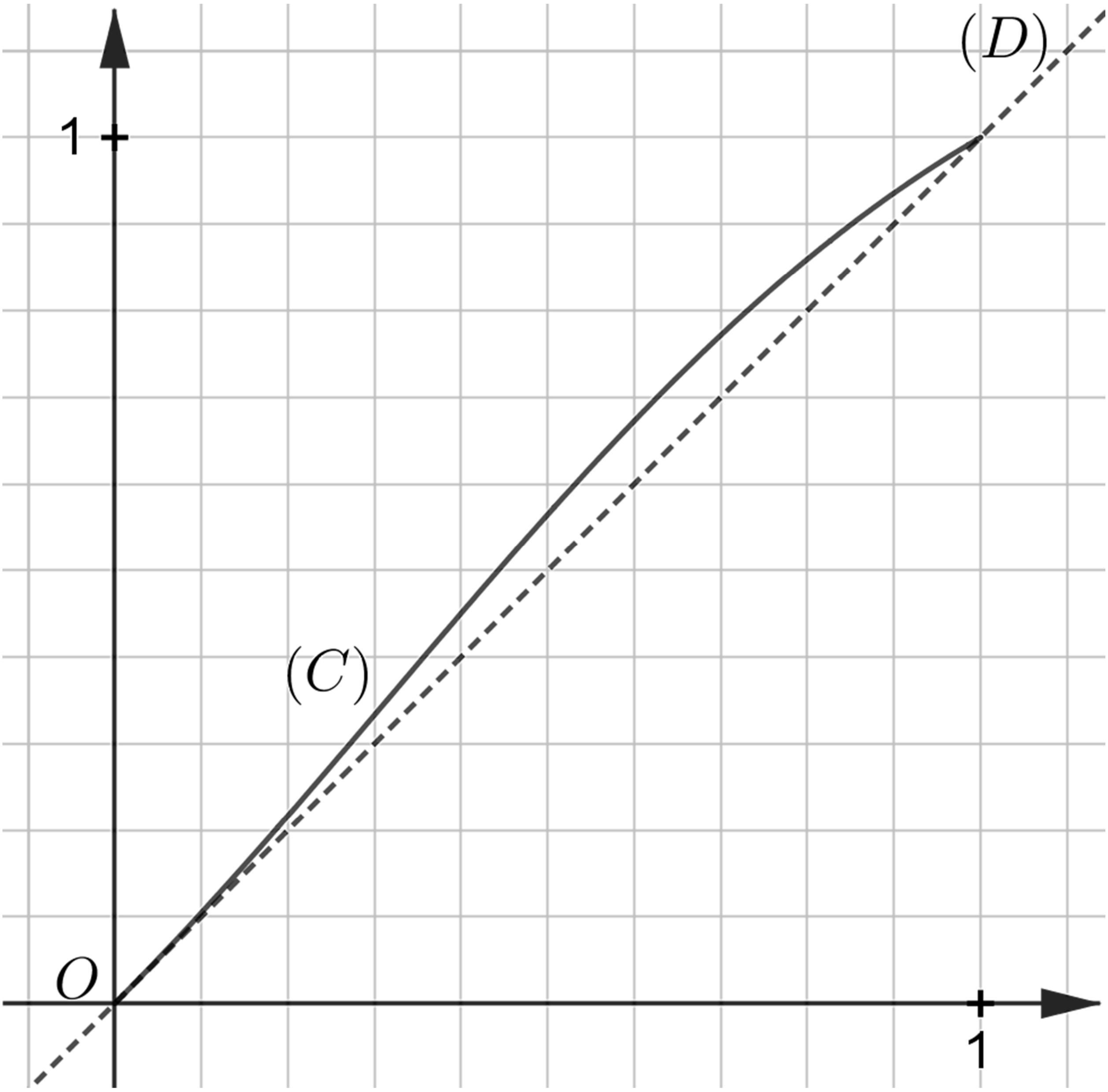



```
n=1
P=1
while abs(P−0.25)  …
    n=n+1
    P= …
print("n=",n)
```

EXERCICE 3



EXERCICE 4



Corrigé bac blanc janvier 2025 SUJET 1 (thiaude)

EXERCICE 1

Question 1 **Réponse c**

Un groupe de 20 élèves souhaite former une équipe de 4 personnes pour réfléchir ensemble à un projet scolaire : combien d'équipes différentes peut-on constituer ?

Une équipe de 4 personnes extraites d'un groupe de 20 élèves est une partie à 4 éléments d'un ensemble à 20 éléments : il y en a $\binom{20}{4}$.

Question 2 **Réponse b**

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BANANES ?

Il y a 7 lettres dans le mot BANANES dont 2 lettres A et 2 lettres B, donc il y a $\frac{7!}{2!2!}$ anagrammes de ce mot.

Question 3 **Réponse c**

Une personne possède 7 CD de musique classique et 13 CD de Jazz : elle souhaite emporter pour ses vacances 4 CD, dont 2 de musique classique et 2 de Jazz.
De combien de façons peut-elle procéder ?

Il y a $\binom{7}{2}$ choix possibles des 2 CD de musique classique parmi les 7 CD de musique classique puis ceci étant fait il y a $\binom{13}{2}$ choix pour les 2 CD de jazz parmi les 13 CD de Jazz. Les choix se multiplient donc il y a $\binom{7}{2} \times \binom{13}{2}$ choix possibles. Or, $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!}$ et $\binom{13}{2} = \frac{13\,!}{2\,!11\,!}$ d'où la réponse.

Question 4 **Réponse b**

Une grille est composée de cinq colonnes A, B, C, D, E et de cinq lignes numérotées 1, 2, 3, 4, 5.
De combien de façons peut-on griser au moins l'une des cases de cette grille ?

Une grille est composée de 25 cases. Si l'on s'autorise la grille restant « blanche » alors pour chacune des 25 cases il y a 2 choix (case grisée ou non) et comme les choix s multiplient il y a $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{25\ facteurs} = 2^{25}$ telles grilles, mais la grille restant « blanche » est interdite donc il y a $\mathbf{2^{25} - 1}$ grilles ayant au moins une case grisée.

EXERCICE 2

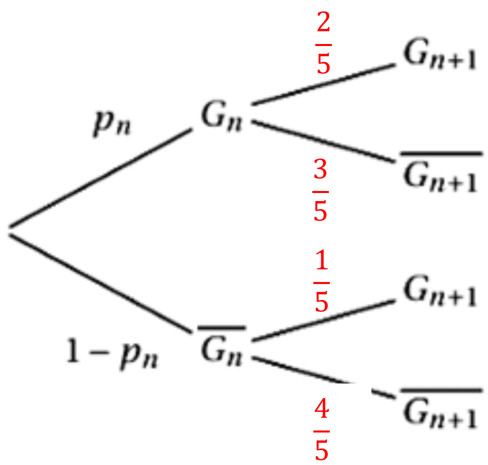
Partie A

• si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$

• si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$

$n \in \mathbb{N}^*$, G_n : « l'internaute gagne la n-ième partie », p_n la probabilité de l'évènement G_n, $p_1 = 1$

1. Compléter l'arbre pondéré donné en annexe.



1. **Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on a : $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+1} = P(G_{n+1})$. Or, G_n et $\overline{G_n}$ réalisent une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$$
$$= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}p_n = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

2. **Le programme Python donné en annexe détermine le plus petit entier naturel n tel que :**

$$|p_n - 0,25| < 10^{-6}$$

   Compléter sur l'annexe, les lignes 03 et 05 exactement comme elles doivent être tapées en Python.

```
03 while abs(P-0.25) >=10**(-6):
05     P= 1/5*P+1/5
```

3. **Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = p_n - \frac{1}{4}$.**

   a. **Calculer v_1.**

   $v_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}}$

   b. **Déterminer la nature de la suite (v_n) et en préciser la raison.**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}v_n$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ et $\frac{1}{5}$ est une constante donc (v_n) **est géométrique de raison $\frac{1}{5}$**.

   c. **Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, or $v_n = p_n - \frac{1}{4}$ autrement dit : $p_n = v_n + \frac{1}{4}$,

   donc : $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

   <u>Conclusion</u> :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

   d. **Montrer que (p_n) est convergente et donner sa limite.**

   On a : $-1 < \frac{1}{5} < 1$, or si : $-1 < q < 1$ alors $\lim_{N \to +\infty} q^N = 0$, donc : $\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^N = 0$.

   On a : $\lim_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^N = 0$$

   Puis par limite d'une produit et d'une somme :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

   <u>Conclusion</u> : $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{4}$.

Partie B

Le joueur doit effectuer 10 parties, toutes les parties sont indépendantes, probabilité de gagner chaque partie est égale à 0,25 ; X est la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. a. **Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.**

On considère l'épreuve : le joueur joue une partie.

Elle admet deux issues :

— le succès : le joueur gagne la partie, de probabilité $p = 0{,}25$

— l'échec : le joueur perd la partie, de probabilité $1 - p = 0{,}75$

Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}25$.

On répète 10 fois avec indépendance cette épreuve de Bernoulli donc que la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, à savoir X, suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}25$.

$\boldsymbol{X}$ **suit la loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n = 10}$ et $\boldsymbol{p = 0,25}$.**

b. **Déterminer la probabilité que le joueur gagne exactement la moitié des 10 parties, en donner la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-3}.**

Pour tout $k \in \{0; \ldots; 10\}$, on a :

$$P(X = k) = \binom{10}{k} 0{,}25^k 0{,}75^{10-k} \quad (cours)$$

L'événement « le joueur gagne exactement la moitié des parties » est l'événement $X = 5$.

Or :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0{,}25^5 \times 0{,}75^{10-5} = \binom{10}{5} \times 0{,}25^5 \times 0{,}75^5 \approx 0{,}058$$

La probabilité que le joueur gagne exactement la moitié des parties est environ $\mathbf{0,058}$ arrondi à 10^{-3}.

c. **Déterminer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie, valeur exacte puis arrondie à 10^{-3}.**

L'événement « le joueur gagne au moins une partie » est l'événement $X \geqslant 1$.

Or, on a :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}25^0 \times 0{,}75^{10} = 1 - 0{,}75^{10}$$

La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $\mathbf{1 - 0,75^{10}}$, donc environ $\mathbf{0,944}$ arrondi à $\mathbf{10^{-3}}$.

d. **Déterminer l'espérance mathématique de $\boldsymbol{X}$.**

On sait que pour une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n, p)$ l'espérance est $n \times p$ donc :

$\boldsymbol{E(X)} = 10 \times 0{,}25 = \mathbf{2,5}$

2. **Le joueur doit payer 30€ pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8€.**

a. **Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.**

Pour 10 parties jouées le joueur dépense 30€ au départ. Or, l'espérance mathématique étant de 2,5 (partie gagnées sur 10 parties jouées), il peut espérer gagner $2{,}5 \times 8€ = 20€$. La dépense est de 30€, l'espérance de « gain » de seulement 20€ donc **le jeu est défavorable pour le joueur**.

b. **Probabilité que le joueur réalise un bénéfice supérieur à 40€, arrondie à 10^{-5}**

Le bénéfice du joueur est : nombre de partie gagnées $\times$ 8€ $-$ 30€ donc dire que le bénéfice est supérieur ou égal à 40€ revient à dire que : nombre de parties gagnées $\times 8 > 70$, c'est-à-dire : nombre de parties gagnées $\geqslant 8{,}75$ autrement dit que le nombre de parties gagnées est supérieur ou égal à 9.

Or :

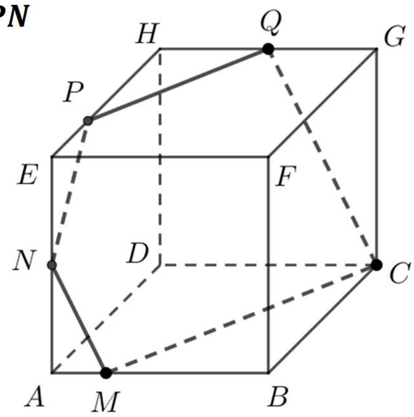
$$P(X \geqslant 9) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} 0{,}25^9 0{,}75^1 + \binom{10}{10} 0{,}25^{10} 0{,}75^0$$
$$= 10 \times 0{,}25^9 \times 0{,}75 + 0{,}25^{10} \approx 3 \times 10^{-5}$$

La probabilité que le joueur réalise un bénéfice supérieur à 40€ est environ 3×10^{-5} arrondie à 10^{-5}.

EXERCICE 3

$ABCDEFGH$ est un cube, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, Q est le milieu de $[HG]$.

La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (MCQ) est le polygone $MCQPN$ où $P \in [EH]$ et $N \in [AE]$, non représenté sur la figure.



1. **Justifier que les droites (MN) et (CQ) sont parallèles puis placer N sur l'annexe.**
   Les faces $ABFE$ et $DCGH$ du cube sont opposées donc le plan contenant la face $ABFE$ et le plan contenant la face $DCGH$ sont parallèles.
   Or, si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
   On en déduit que les droite (MN) **et** (CQ) **sont parallèles.**

2. **Donner sans justification la position relative des droites (CM) et (QP), puis placer P sur l'annexe et tracer le polygone $MCQPN$.**
   De même, on montrerait que : $(CM) \mathbin{/\!/} (QP)$.

3. **On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.**
   a. **Donner sans justification les coordonnées de M, C et Q.**
   On a : $\boldsymbol{M(\frac{1}{4}\,;0;0)}$, $\boldsymbol{C(1;1;0)}$, $\boldsymbol{Q\left(\frac{1}{2};1;1\right)}$.

   b. **Déterminer les coordonnées de P. On admet que : $N(0;0;\dfrac{1}{2})$.**
   Remarquons que $P(0; y_P; 1)$ puis déterminons y_P.
   On a vu que $(CM) \mathbin{/\!/} (QP)$ donc $\overrightarrow{CM}$et $\overrightarrow{QP}$ sont colinéaires : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{QP} = \alpha\overrightarrow{CM}$.
   Or, $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \\ z_M - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 1 \\ 0 - 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{QP}$ a pour coordonnées :

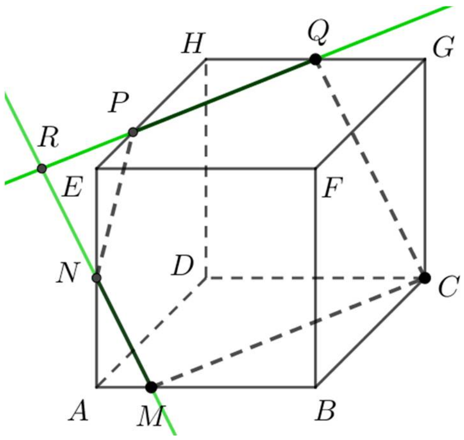
$$\begin{pmatrix} x_P - x_Q \\ y_P - y_Q \\ z_P - z_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ y_P - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ y_P - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} = \alpha\left(-\dfrac{3}{4}\right) \\ y_P - 1 = \alpha(-1) \\ 0 = \alpha(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}\alpha \\ y_P = -\alpha + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} \\ y_P = -\alpha + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{3} \\ y_P = -\dfrac{2}{3} + 1 \end{cases} \Rightarrow y_P = \dfrac{1}{3}$$

Finalement : $\boldsymbol{P\left(0\,;\dfrac{1}{3};1\right)}$.

c. Les droites (QP) et (MN) se coupent en R : placer ce point sur l'annexe puis en calculer les coordonnées.



<u>Méthode astucieuse</u>

Il résulte du théorème des deux plans parallèles que : $(QR) \mathbin{/\!/} (CM)$ et $(MR) \mathbin{/\!/} (CQ)$ donc $MRQC$ est un parallélogramme, autrement dit : $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{CQ}$.

Or, $\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix} x_R - \frac{1}{4} \\ y_R - 0 \\ z_R - 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc : $\begin{cases} x_R - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \\ y_R = 0 \\ z_R = 1 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x_R = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ y_R = 0 \\ z_R = 1 \end{cases}$, soit finalement : $\begin{cases} x_R = -\frac{1}{4} \\ y_R = 0 \\ z_R = 0 \end{cases}$

Résumons :

$$\boldsymbol{R\left(-\frac{1}{4}; 0; 1\right)}$$

<u>Autre méthode</u> (déconseillée) :

On a $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Q(\frac{1}{2}; 1; 1)$ donc une représentation paramétrique de (QP) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 1 - \frac{2}{3}t \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On a $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $N\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ donc une représentation paramétrique de (MN) est :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4}\lambda \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Pour déterminer les coordonnées de R, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 1 - \frac{2}{3}t \\ z = 1 \\ x = -\frac{1}{4}\lambda \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

De L_3 et L_6 on tire : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda = 1$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}$ puis $\lambda = 1$

De $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$ et $x = -\frac{1}{4}(1) = -\frac{1}{4}$ on tire $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = -\frac{1}{4}$, c'est-à-dire : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t$

ou encore $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}t$ soit finalement $t = \frac{3}{3}$.

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$
$$y = 0$$
$$z = 1$$

Finalement : $\boldsymbol{R(-\frac{1}{4} ; 0 ; 1)}$.

Attention :

si l'énoncé ne précisait pas que les droites sont sécantes, alors on serait obligé de résoudre le système **par équivalences**.

EXERCICE 4

Partie A

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{g(x) = e^x - x - 1}$

1. Étudier les variations de la fonction g. Préciser les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

variations de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il résulte des formules de dérivation que : $g'(x) = e^x - 1$.

On a les équivalences : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$, donc :

• g' est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et g est continue sur $[0; +\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$,

• g' est strictement négative sur $]-\infty; 0[$ et g est continue sur $]-\infty; 0]$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

limites de g

• On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $(cours)$, par limite d'une différence on en déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$.

• Pour tout $x \neq 0$, on a : $g(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right)$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $(cours)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $(cours)$ donc par limite d'une différence :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$, puis par limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Il résulte de la question précédente que g admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}$, atteint en 0, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant g(0)$. Or, $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{g(x) \geqslant 0}$.

3. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x - x > 0$.

D'après **2.**, pour tout réel x, on a : $g(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire : $e^x - x - 1 \geqslant 0$, autrement dit : $e^x - x \geqslant 1$ d'où $e^x - x > 0$.

Résumons : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{e^x - x > 0}$.

<u>Partie B</u>

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}}$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe, à compléter.

1. a. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x(2 - x) - 1}{(e^x - x)^2}}$$

f est le quotient de fonction dérivables sur $[0; 1]$ et son dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle donc f est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire sur $[0; 1]$.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

Rappels : $(e^x)' = e^x$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - (e^{2x} - e^x - e^x + 1)}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(-x + 2) - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x(2 - x) - 1}{(e^x - x)^2}}$$

b. En déduire que f est croissante sur $[0; 1]$.

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $e^x(2 - x) - 1$.

Or, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc : $0 \geqslant -x \geqslant -1$ puis : $0 + 2 \geqslant -x + 2 \geqslant -1 + 2$, autrement dit : $2 \geqslant 2 - x \geqslant 1$, puis en multipliant chaque membre par $e^x > 0$: $e^x \times 2 \geqslant e^x(2 - x) \geqslant e^x$, puis en retranchant 1 : $2e^x - 1 \geqslant e^x(2 - x) - 1 \geqslant e^x - 1$.

Or, pour $x \geqslant 0$ on a : $e^x \geqslant e^0$ c'est-à-dire $e^x \geqslant 1$, autrement dit : $e^x - 1 \geqslant 0$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc **f est croissante sur $[0; 1]$**.

2. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

Soit $x \in [0; 1]$, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$. Or, f est croissante sur $[0; 1]$ donc elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent : $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. Or,

$$f(0) = \frac{e^0 - 1}{e^0 - 0} = \frac{1 - 1}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0 \text{ et } f(1) = \frac{e^1 - 1}{e^1 - 1} = \frac{e - 1}{e - 1} = 1$$

donc : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, autrement dit **$f(x) \in [0; 1]$**.

3. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, on a :

$$f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$$

Soit $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - \frac{x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$$

$$= \frac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} = \frac{e^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{e^x - x} = \frac{e^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{e^x - x}$$

$$= \frac{(1-x)(e^x - (x+1))}{e^x - x} = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$

Or, pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) = e^x - x - 1$ donc : $\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}; \mathbf{1}], \boldsymbol{f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}}$.

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$.

Pour tout $x \in [0;1], 1 - x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ et $e^x - x > 0$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ par conséquent sur $[0;1]$, **(C) est située au-dessus (au sens large) de (D).**

D'autre part, avec les notations de l'énoncé on a les équivalences :

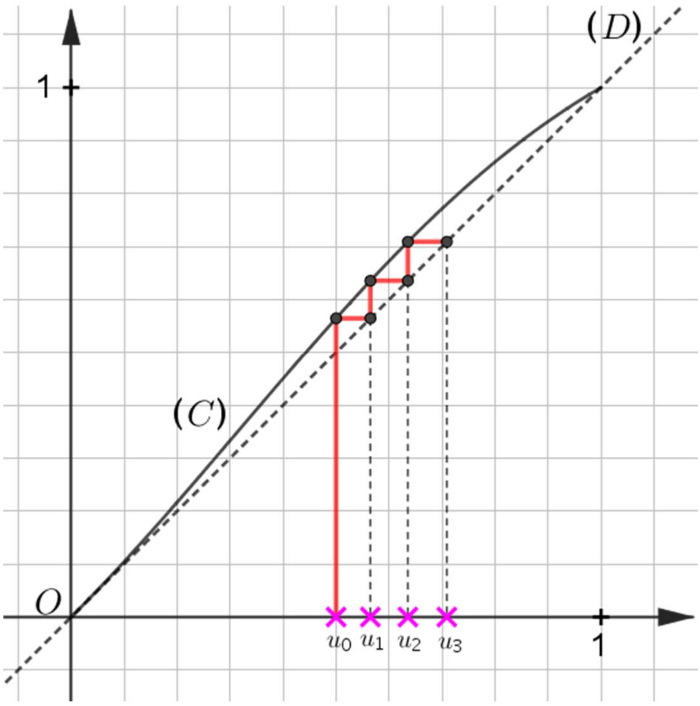
$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow (1-x)g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \; ou \; g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = 0$

(C) et (D) ont donc pour points en commun $O(0;0)$ et le point de coordonnées $(1;1)$.

Partie C

$\boldsymbol{u_0 = \frac{1}{2}}$ **et** $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)}$

1.



2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».

• <u>initialisation</u>

On a : $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}5647$. On a donc bien : $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ par conséquent P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P_k : \frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$ est vraie et démontrons que P_{k+1} est vraie.

Les nombres $\frac{1}{2}$, u_k, u_{k+1} et 1 appartiennent tous à $[0;1]$, intervalle sur lequel f est croissante donc conserve le sens de la relation d'ordre, par conséquent : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(1)$.

Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}5647$, $f(u_k) = u_{k+1}$, $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $f(1) = 1$ donc : $0{,}5 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$, autrement dit : P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. **En déduire que la suite (u_n) est convergente.**

• pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante

• pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$ donc la suite (u_n) est majorée par la constante 1

La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.

4. **On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.**
Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

On sait que : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, donc par passage à la limite : $0{,}5 \leqslant \ell \leqslant 1$.

Avec les notations de l'exercice, on a les équivalences :

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{e^\ell - 1}{e^\ell - \ell} \Leftrightarrow \ell\left(e^\ell - \ell\right) = e^\ell - 1 \Leftrightarrow \ell e^\ell - l^2 - e^\ell + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^\ell(\ell - 1) + 1^2 - \ell^2 = 0 \Leftrightarrow e^\ell(\ell - 1) - (\ell^2 - 1^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow e^\ell(\ell - 1) - (\ell + 1)(\ell - 1) = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)\left(e^\ell - \ell - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\ell - 1)g(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell - 1 = 0 \; ou \; g(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1 \; ou \; \ell = 0$$

Or :

$0{,}5 \leqslant 1 \leqslant 1$, donc : $\ell = 1$ est accepté,

$\ell = 0$ ne vérifie pas : $0{,}5 \leqslant \ell \leqslant 1$, donc $\ell = 0$ est refusé.

Finalement : $\ell = 1$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$