

Term 13. Variables aléatoires, loi des grands nombres ACTIVITÉS

[D] $\Omega = \{e_1; \dots e_r\}$ est l'**univers** associé à une expérience aléatoire.

• une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction X définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $X(\Omega)$ est l'**ensemble des valeurs prises par X**

exemple On lance une pièce de monnaie, $\Omega = \{pile; face\}$, si on obtient pile on perd 3€, si on obtient face on gagne 5€.

Le gain algébrique du joueur en € est une variable aléatoire X telle que : $X(pile) = -3$ et $X(face) = 5$.

L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{-3; 5\}$.

[D] quelques définitions

• la **loi de probabilité** de X est donnée par le tableau à deux lignes :

valeurs x_i prises par X	x_1	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

où $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

• l'**espérance mathématique** $E(X)$ de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) x_i$$

$E(X)$ est la moyenne des valeurs prises par X

- un jeu est **équitable** $\stackrel{\text{déf}}{\iff}$ l'espérance du gain du joueur est nulle
- X est une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$, a et b sont des constantes, alors $aX + b$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$ avec les mêmes probabilités $p_1, \dots, p_n$ et on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

[D] quelques définitions

• la **variance** $V(X)$ est le réel positif ou nul :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) (x_i - E(X))^2$$

• l'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

[F] quelques formules

• **formule de König** (ou Koenig)-Huygens

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(x)]^2$$

• pour a et b constantes :

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \quad \text{d'où} \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

[D] somme de deux variables

X et Y sont deux variables aléatoires associées à une même expérience d'univers Ω , alors $X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

A01 On lance une pièce et un dé : les faces de la pièce portent le numéro 1 (pile) et le numéro 2 (face), les faces du dé portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, on appelle X et Y les variables aléatoires associées aux résultats de la pièce et du dé et on pose $Z = X + Y$.

1. Dessiner un arbre de probabilité associé à cette expérience.
2. Donner la loi de probabilité de X , celle de Y et celle de Z .
En déduire $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$. Que remarque-t-on ?

A02 Un étudiant passe un DST de maths : s'il le rate alors $X = 0$, sinon $X = 1$, on précise que $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Il passe ensuite un DST de physique : s'il le rate alors $Y = 0$, sinon $Y = 1$, on précise que : s'il avait raté le DST de maths il raterait celui de physique avec une probabilité de $\frac{3}{4}$, mais que s'il avait réussi le DST de maths il réussirait avec certitude celui de physique. On pose : $Z = X + Y$.

1. Donner la loi de probabilité de X , en déduire que $E(X) = \frac{1}{2}$.
2. Dessiner un arbre de probabilité, en déduire que : $P(Y = 0) = \frac{3}{8}$ et $P(Y = 1) = \frac{5}{8}$ puis vérifier que $E(Y) = \frac{5}{8}$.
3. Justifier que : $P(Z = 0) = \frac{3}{8}$, $P(Z = 1) = \frac{1}{8}$, $P(Z = 2) = \frac{1}{2}$ et vérifier que $E(Z) = \frac{9}{8}$.
4. Montrer que : $V(X) = \frac{1}{4}$, $V(Y) = \frac{15}{64}$ et $V(Z) = \frac{55}{64}$.
A-t-on, dans cet exemple : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$?

[P] X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω , $a \in \mathbb{R}$, alors :

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ $E(aX) = aE(X)$ (linéarité)

[D] Les **variables aléatoires X et Y sont indépendantes** lorsque, pour toute valeur x_i de X et toute valeur y_j de Y les événements $X = x_i$ et $Y = y_j$ sont indépendants :

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

[F] si X et Y sont **indépendantes**, alors : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

[D] Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **indépendantes** lorsque pour toute valeur x_1 prise par X_1 , pour toute valeur x_2 prise par X_2 , ..., pour toute valeur x_n prise par X_n on a :

$$P((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$

[P] **quelques propriétés**

- soient $X_1, \dots, X_n$ des variables **indépendantes** qui suivent la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
- toute variable aléatoire X suivant $\mathcal{B}(n, p)$ peut s'écrire comme somme de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \text{ avec les } X_i \text{ indépendants et suivant } \mathcal{B}(p)$$

- si X suit $\mathcal{B}(n; p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

A03 Une urne contient 3 jetons marqués 0, et 2 jetons marqués 1. On tire au hasard un jeton de l'urne : X est la variable aléatoire qui correspond au nombre obtenu. On ne remplace pas dans l'urne le premier jeton tiré et on tire au hasard un deuxième jeton de l'urne : on appelle Y la variable aléatoire qui correspond au nombre obtenu.

1. Donner les lois de probabilité de X et de Y , $V(X)$ et $V(Y)$.
2. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
3. On pose : $Z = X + Y$. Vérifier que Z prend les valeurs 0, 1, 2 avec les probabilités $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{10}$, en déduire que : $V(Z) = \frac{9}{25}$ et comparer avec $V(X)$ et $V(Y)$.

A04 On lance quatre fois de suite un dé et on note X le nombre de fois que le chiffre 6 est sorti sur l'ensemble de ces quatre lancers. Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

On suppose choisie une unité de distance.

Si $\|\vec{i}\| = 1$ on dit que $(O; \vec{i})$ est un axe normé d'origine le point O . Soit $(O; \vec{i})$ un axe normé, A le point de cet axe d'abscisse a , B le point de cet axe d'abscisse b

- le réel positif ou nul $|b - a|$ est la **longueur** (diamètre) de $[a, b]$
- la **distance entre les réels** a et b est la distance entre les points A et B , elle se note $d(a, b)$ et on a :

$$d(a, b) = |b - a| = |a - b|$$

- le **centre de l'intervalle** $[a, b]$ noté $c_{[a,b]}$ ou c est le réel :

$$c_{[a,b]} = \frac{a + b}{2}$$

(le centre de l'intervalle $[a, b]$ est l'abscisse du milieu du segment $[AB]$)

- le **rayon de l'intervalle** $[a, b]$ est le réel $r_{[a,b]}$:

$$r_{[a,b]} = \frac{d(a, b)}{2} = \frac{|b - a|}{2} = \frac{|a - b|}{2}$$

(le rayon d'un intervalle est égal à la moitié de sa longueur)

- on peut utiliser les équivalences :

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow d(c_{[a,b]}, x) \leq r_{[a,b]} \Leftrightarrow |x - c_{[a,b]}| \leq r_{[a,b]}$$

$$a < x < b \Leftrightarrow d(c_{[a,b]}, x) < r_{[a,b]} \Leftrightarrow |x - c_{[a,b]}| < r_{[a,b]}$$

A05 X est une variable aléatoire, écrire à l'aide d'une valeur absolue chacun des événements suivants :

1. $3 < X < 7$ 2. $2,3 < X < 7,4$ 3. $12,5 \leq X \leq 17,5$

A06 X est une variable aléatoire, écrire sous forme d'un encadrement chacun des événements :

1. $|X - 3| < 0,2$ 2. $|X - 5,2| < 1$ 3. $|X - 3,2| \leq 2,1$

A07 X est une variable aléatoire, écrire l'événement contraire :

- $E : |X - 5| < 1$ $F : |X - 7| \leq 0,5$ $G : |X - 4| > 0,8$

F Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$ (utilisée même si $A \subset B$ et $A \neq B$)

A08 Soit X une variable aléatoire telle que : $P(|X - 3| \geq 1) \leq 0,2$. Que peut-on dire de la probabilité de l'événement $|X - 3| > 1$?

A09 Soit X une variable aléatoire telle que : $P(|X - 5| \geq 2) \leq 0,1$. Que peut-on dire de $P(X \geq 7)$?

A10 Soit X une variable aléatoire telle que : $P(|X - 10| \geq 3) \leq 0,8$. Que peut-on dire de $P(X < 7)$?

P **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** (démonstration sur livre)

Soit X une variable aléatoire alors pour tout $\delta > 0$ on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

A11 X variable aléatoire d'espérance $\mu = 12$ et de variance $V = 9$. Que peut-on dire de la probabilité de l'événement $|X - 12| \geq 4$?

A12 X variable aléatoire d'espérance $\mu = 10$, de variance $V = 3$. Que peut-on dire de la probabilité de l'événement $|X - 10| < 6$?

A13 (d'après bac, extrait)

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- la 1^{ère} partie consiste à lancer une pièce de monnaie : si on tombe sur « pile » on gagne 1€, si on tombe sur « face » on gagne 2€
- la 2^e partie consiste à lancer un dé à six faces : si on tombe sur un chiffre pair on gagne 1€, si on tombe sur « 3 » ou « 5 » on gagne 2€, si on tombe sur « 1 » on perd 5€.

La variable aléatoire X désigne le gain à la première partie en €, la variable aléatoire Y désigne le gain algébrique à la deuxième partie.

On admet que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et on pose $S = X + Y$.

1. Donner la loi de probabilité de X , en déduire $E(X)$ et $V(X)$.
2. Donner la loi de probabilité de Y , en déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Justifier que la loi de probabilité de S est :

s_k	-4	-3	2	3	4
$P(S = s_k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

4. En déduire $E(S)$, $V(S)$.

Trouver un lien entre $E(X + Y)$, $E(X)$ et $E(Y)$.

Trouver un lien entre $V(X + Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.

Rép :

$$E(X) = \frac{3}{2}; V(X) = \frac{1}{4}; E(Y) = \frac{1}{3}; V(Y) = \frac{53}{9}; E(S) = \frac{11}{6}; V(S) = \frac{221}{36}$$

A14 Une brasserie est située sur un sentier de randonnée, X est le chiffre d'affaire en € sur le créneau $14h - 17h$. Une étude montre que $E(X) = 16$ et $\sigma(X) = 2$. Que peut-on dire de la probabilité que demain le chiffre d'affaire entre $14h$ et $17h$ soit strictement compris entre 12€ et 20€ ?

Rép : $\geq 0,75$

Soit X une variable aléatoire donnée, une liste de n variables indépendantes $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suivant la même loi que X est appelée échantillon de taille n associé à X . On pose :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

M_n est moyenne de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ et **S_n la somme**

[F] quelques formules

$$E(S_n) = nE(X) \quad V(S_n) = nV(X) \quad \sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$$

$$E(M_n) = E(X) \quad V(M_n) = \frac{1}{n} V(X) \quad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma(X)$$

A15 Justifier les formules précédentes.

A16 [d'après lycéedadultes.fr, un grand classique]

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est :

x_i	-10	5	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{5}$

Pour tout échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la loi de X on note M_n la moyenne de cet échantillon. Déterminer la taille n à partir de laquelle la variance de M_n devient inférieure ou égale à 0,05.

Rép : $E(X) = 17/4$ $V(X) = 1611/16$ $n \geq V(X)/0,05$, $n = 2014$

A17 Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 : la variable aléatoire T_1 modélise le nombre de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution et la variable aléatoire T_2 modélise le nombre de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que T_1 et T_2 sont deux variables indépendantes et on précise que : $E(T_1) = 4$, $V(T_1) = 2$, $E(T_2) = 3$ et $V(T_2) = 1$.

1. Déterminer $E(T)$ et $V(T)$.
2. Un client passe une commande de téléviseur sur internet.

Justifier que la probabilité que sa durée d'attente, exprimée en jours, appartiennent à $[4; 10]$ est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

A18 [d'après bac 2024, extrait]

Un client arrive à une station d'essence et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère. On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance 6 et de même variance 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente

total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3 .
2. a. Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure à 0,81.

P M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de X , alors pour tout $\delta > 0$:

- **inégalité de concentration** : $P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$ (🔴 n)
- **loi faible des grands nombres** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$

A19 Démontrer les deux points précédents.

A20 On lance n fois une pièce équilibrée et l'on désigne par M_n la variable aléatoire qui, à ces n lancers, associe la fréquence de « Pile » obtenus autrement dit la moyenne de « Pile » obtenus.

1. Montrer que : $P(|F_n - 0,5| \geq 0,02) \leq \frac{625}{n}$.
2. En déduire un entier naturel n tel que la probabilité de l'événement $0,48 < M_n < 0,52$ est supérieure ou égale à 0,95.

Rép : 12 500

A21 [d'après bac 2025, extrait]

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match de basket-ball.

On admet que $E(X) = 22$ et $V(X) = 65$. Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif. On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^e, ..., n -ième matchs, on admet que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X , on pose :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
 - a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .
 - c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
 - d. En déduire que $P(19 < M_{50} < 25) > 0,85$.
2. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

A22 [d'après bac 2025, extrait]

La probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à 0,145.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. On donnera la valeur arrondie au millièm.

Rép : à la calculatrice $P(X \leq 8) \approx 0,704$

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145.

- a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.
- b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.

Rép : $1 - 0,855^n$ puis $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)}$, c'est à partir de $n = 30$

3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$, où X_n est la variable aléatoire définie à la question 2.

- a. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et justifier que $V(F_n) = \frac{0,123975}{n}$.
- b. Vérifier que : $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$.
- c. Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que, pour cet échantillon, $F_{1000} = 0,3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs.

A-t-il raison ? Rép on est dans b. $n = 1000$ ($\leq 1,25\%$), oui

Preuve de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

• Étape 1 : inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive ou nulle d'espérance $E(X)$.

Alors, pour tout réel $\delta > 0$, on a :

$$P(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta}$$

Preuve

On note $x_1, \dots, x_n$ les valeurs prises par X , alors on a :

$$E(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n P(X = x_i)x_i = \sum_{x_i < \delta} P(X = x_i)x_i + \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i$$

Résumons :

$$E(X) = \sum_{x_i < \delta} P(X = x_i)x_i + \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i$$

Or, tous les x_i sont positifs ou nuls et une probabilité est un réel positif ou nul, donc pour tous les x_i on a $P(X = x_i)x_i \geq 0$, et comme une somme de nombres tous positifs ou nuls est positive ou nulle, on a :

$$\sum_{x_i < \delta} P(X = x_i)x_i \geq 0$$

puis en ajoutant à chaque membre le nombre :

$$\sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i$$

on obtient :

$$\sum_{x_i < \delta} P(X = x_i)x_i + \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i \geq \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i$$

c'est-à-dire :

$$E(X) \geq \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i$$

Or, tous les x_i tels que $x_i \geq \delta$ sont plus grand ou égaux à δ :

$$x_i \geq \delta$$

donc pour ces x_i on a, en multipliant par le réel positif ou nul $P(X = x_i)$:

$$P(X = x_i)x_i \geq P(X = x_i)\delta$$

puis par somme membre à membre :

$$\sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i \geq \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)\delta$$

On a :

$$E(X) \geq \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i \text{ et } \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)x_i \geq \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)\delta$$

donc :

$$E(X) \geq \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)\delta$$

Or,

$$\sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i)\delta = \delta \times \sum_{x_i \geq \delta} P(X = x_i) = \delta \times P(X \geq \delta)$$

Donc :

$$E(X) \geq \delta \times P(X \geq \delta)$$

puis en divisant par $\delta > 0$:

$$\frac{E(X)}{\delta} \geq P(X \geq \delta)$$

autrement dit :

$$P(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta}$$

• **Étape 2 : on applique l'inégalité de Markov**

Soit X une variable aléatoire et un réel $\delta > 0$, posons $\mu = E(X)$.

La variable aléatoire $(X - \mu)^2$ est positive ou nulle et $\delta^2 > 0$

donc d'après l'inégalité de Markov :

$$P((X - \mu)^2 \geq \delta^2) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\delta^2} \quad (*)$$

Or, d'une part on a les équivalences :

$$\begin{aligned} (X - \mu)^2 \geq \delta^2 &\Leftrightarrow \sqrt{(X - \mu)^2} \geq \sqrt{\delta^2} \Leftrightarrow |X - \mu| \geq |\delta| \\ &\Leftrightarrow |X - \mu| \geq \delta \quad (\delta > 0) \end{aligned}$$

et d'autre part on a les égalités :

$$\begin{aligned} E((X - \mu)^2) &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) + E(-2\mu X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) + (-2\mu)E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= V(X) \text{ (formule de König)} \end{aligned}$$

Donc l'inégalité (*) s'écrit aussi :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

ou encore

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Conclusion

Pour toute variable aléatoire X et tout réel $\delta > 0$, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

(inégalité de Bienaymé-Tchebychev)