ACTIVITES 12. Fonctions trigonométriques Thiaude P.

$\boxed{F}$ Rappels

- la **fonction cosinus** $x \mapsto \cos(x)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$
- la **fonction sinus** $x \mapsto \sin(x)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$
- si u est dérivable sur un intervalle I, alors $\sin u$ et $\cos u$ sont dérivables sur I et on a :

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$
$$(\sin u)' = u' \times \cos u$$

- la fonction **cosinus** est **paire** et la fonction **sinus** est **impaire**, c'est-à-dire que pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

dans un **repère orthogonal** la courbe représentative de la fonction **cosinus** est symétrique par rapport à **l'axe des ordonnées** du repère,

dans un repère quelconque la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'**origine du repère**

- pour tout réel x, on a :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

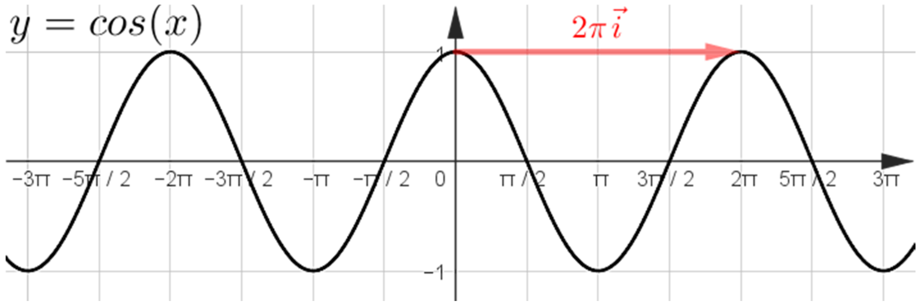
on dit que les fonctions cosinus : $x \mapsto \cos(x)$ et sinus $x \mapsto \sin(x)$ sont périodiques de période 2π ou encore qu'elles sont **2π –périodiques** : connaître leur courbes représentatives dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ sur un intervalle de largeur 2π suffit pour en déduire par **translation de $2\pi\vec{i}$** leur courbe représentative sur $\mathbb{R}$

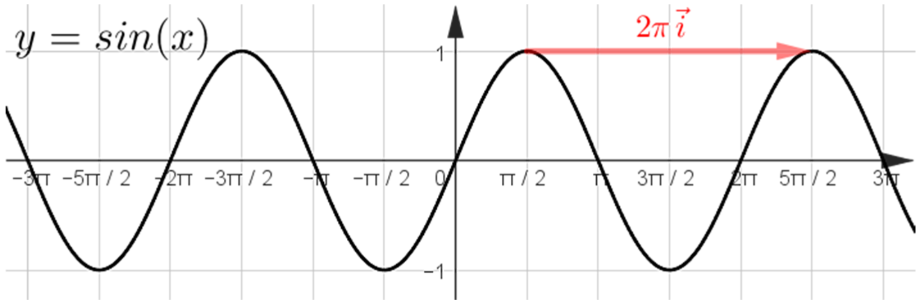
- **tableau de variation sur $[0;\pi]$**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0

- **courbes représentatives**





$\boxed{F}$ Équations trigonométriques

- pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation $\cos(x) = \cos(a)$ ou $\sin(x) = \sin(a)$ on peut utiliser :

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \boldsymbol{x = a}\ [2\pi] \quad ou\ \boldsymbol{x = -a}\ [2\pi]$$
$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \boldsymbol{x = a}\ [2\pi] \quad ou\ \boldsymbol{x = \pi - a}\ [2\pi]$$

- pour résoudre dans $]-\pi;\pi]$ ou $[0;2\pi[$ une équation $\cos(x) = b$ ou $\sin(x) = b$ où b est une valeur remarquable le plus simple est d'utiliser le cercle trigonométrique et on peut vérifier facilement avec la calculatrice en choisissant judicieusement Xgrad.

A01 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

- $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

A02 Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ chacune des équations :

• $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ • $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{F}$ **Inéquations trigonométriques**
Pour résoudre dans $]-\pi;\pi]$ ou $[0;2\pi[$ une inéquation dont l'un des membres est $\cos(x)$ ou $\sin(x)$, et l'autre est une valeur remarquable b on s'aide du cercle trigonométrique. On peut vérifier facilement avec la calculatrice en choisissant judicieusement Xgrad

A03 Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ chacune des inéquations :

• $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ • $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

A04 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$.

1. Déterminer $f'(x)$, en déduire $f'(0)$ puis en revenant à la définition du nombre dérivé en zéro en déduire :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$$
2. Déterminer $g'(x)$, en déduire $g'(0)$ puis en revenant à la définition du nombre dérivé en zéro en déduire :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$\boxed{P}$ **Limites**
$x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ n'ont pas de limites en $-\infty$, ni en $+\infty$

A05 Soit f définie sur $[-\pi;\pi]$ par $f(x) = 5x + 4\sin(x)$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe rpésentative de f dans un repère orthogonal du plan :

• étudier la parité de f, conséquence pour $\mathcal{C}$?
• calculer $f'(x)$, en étudier le signe sur $[-\pi;\pi]$
• dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi;\pi]$

A06 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{\sin(x) + 3}$$
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que f est 2π-périodique, conséquence pour $\mathcal{C}$?
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;2\pi]$ puis dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

A07 Soit f définie sur $[-\pi;\pi]$ par : $f(x) = 2\sin(x) - x$.

1. Montrer que f est impaire, conséquence pour $\mathcal{C}$?
2. Calculer $f'(x)$.
3. Déterminer pour quelles valeurs de $x \in [-\pi;\pi]$ on a $f'(x) > 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi;\pi]$.