

ACTIVITES 11. Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace [Thiaude P.]

Dans tout ce chapitre on suppose qu'une unité de distance est choisie.

[D] produit scalaire dans l'espace

Le **produit scalaire** de \vec{u} par \vec{v} est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, \text{ alors : } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ alors : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \end{cases}$$

Conséquence :

$$\text{Si } A \neq B \text{ et } A \neq C, \text{ alors : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

[P] vecteurs colinéaires

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de l'espace, alors :

- si \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires de même sens** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = +\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- si \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires de sens contraires** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

[P] linéarité et symétrie

Pour tout réel k :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$

[D] carré scalaire

Le **carré scalaire** de \vec{u} est le réel positif ou nul : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

En particulier : $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

[F] identités remarquables

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

[F] produit scalaire dans un triangle

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - BC^2]$$

🔴 le point commun dans les deux vecteurs est en « première position »

[D] droites orthogonales, vecteurs orthogonaux

- deux droites sont **orthogonales** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires en tant que droites d'un même plan
- deux droites sont **perpendiculaires** \Leftrightarrow elles sont orthogonales et ont un point en commun

Considérons deux droites orthogonales, deux cas peuvent se produire :
si elles ont un point en commun alors elles sont perpendiculaires,
si elles n'ont pas de point commun alors elles ne sont pas perpendiculaires

- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ l'un au moins des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ est nul ou les droites (AB) et (CD) sont orthogonales
- notation : $d \perp d'$ signifie que d et d' sont orthogonales
 $\vec{u} \perp \vec{v}$ signifie que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux
- $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace, y compris $\vec{0}$
- $d \perp d' \Leftrightarrow d' \perp d$ et $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$

[P] théorème fondamental

$$\blacktriangleright \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

[P] droite orthogonale à une droite ou à un plan

$$\blacktriangleright \mathcal{D}(A; \vec{u}) \perp \mathcal{D}(B; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\blacktriangleright \mathcal{D}(A; \vec{u}) \perp \mathcal{P}(B; \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ et } \vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

[D] base ou repère orthogonal/orthonormé/orthonormée

- la **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthogonale** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \vec{i} \perp \vec{j}$ et $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$
- le **repère** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthogonal** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \vec{i} \perp \vec{j}$ et $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$
« repère orthonormé » s'abrège en $\mathcal{R}. \mathcal{O}. \mathcal{N}$. ou R.O.N. ou RON.
- la **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormée** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j} \text{ et } \vec{i} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{j} \perp \vec{k} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$
- le **repère** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j} \text{ et } \vec{i} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{j} \perp \vec{k} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$

F formule utilisables dans un repère orthonormé

Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, on donne $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$\blacktriangleright \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \blacktriangleright \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\blacktriangleright AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

A01 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, on donne : $A(-3; 4; 1)$, $B(5; 1; 3)$, $C(0; 4; 3)$ et les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} où m est un paramètre réel :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Rep=28

2. Déterminer m sachant que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Rep=5

A02 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' admettent respectivement pour vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$: montrer que $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$.

A03 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, $A(1; -2; 7)$, $B(3; -1; 10)$ et $C(-4; 5; 8)$: montrer que $(AB) \perp (AC)$

D vecteur normal à un plan

$\vec{n} \neq \vec{0}$ est un vecteur **normal** à un plan $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \vec{n}$ est orthogonal à tous vecteurs de ce plan

P Pour $\vec{n} \neq \vec{0}$ on a l'équivalence :

$\blacktriangleright \vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

M Pour montrer que \vec{n} est normal à un plan \mathcal{P} :

On montre que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ où \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non colinéaires de \mathcal{P} (au choix), ce qui permet de conclure.

A04 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, on note \mathcal{P} le plan passant par $A(2; 3; 1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: montrer que $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{P} .

A05 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, on donne trois points $A(1; -1; 2)$, $B(0; -2; 1)$, $C(2; 3; 0)$ d'un plan \mathcal{P} et on note \mathcal{D} la droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par $E(3; 2; 1)$: montrer que \mathcal{D} est orthogonale à \mathcal{P} .

A06 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, \mathcal{Q} est le plan qui passe par $A(0; 5; 2)$ et admet pour vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on considère $\vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 12 \end{pmatrix}$.
Montrer que \vec{w} est un vecteur normal à $\mathcal{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -4 \end{cases}$

M mesure d'un angle

Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, on donne : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

De : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ on déduit :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

En utilisant la calculatrice on en déduit une valeur approchée de la mesure de l'angle de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) (modulo 2π), parfois la valeur.

F formules de polarisation

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2] = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$

P vecteur normal à un plan

Dans un $\mathcal{R.O.N.}$ \mathcal{P} est le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors :

► $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

► $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ où $d = -ax_A - by_A - cz_A$

D équation cartésienne d'un plan

Tout plan de l'espace muni d'un $\mathcal{R.O.N.}$ admet une **équation cartésienne** $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c non tous nuls et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

A07 Dans l'espace muni d'un $\mathcal{R.O.N.}$ \mathcal{P} est le plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ passant par $A(1; 2; 3)$: déterminer une équation cartésienne de \mathcal{P} .

A08 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$ on donne $A(1; 2; 3), B(5; 1; 1)$: déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P} tel que $(AB) \perp \mathcal{P}$ et $E(0; 4; 6) \in \mathcal{P}$.
Rép : $4x - y - 2z + 16 = 0$

A09 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$ on donne $A(8; 0; 5)$ et $B(2; 4; 3)$: montrer que le plan médiateur de $[AB]$ admet pour équation $-3x + 2y - z + 15 = 0$.

A10 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$ on donne $A(1; 2; 3)$ et on note \mathcal{D} la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -8 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
Déterminer une équation du plan $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$ passant par A .
Rép : $-x + 3y + 2z - 11 = 0$

A11 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$ déterminer une équation du plan \mathcal{Q} passant par $A(0; -1; 4)$ et parallèle au plan $\mathcal{P} : 3x + 5y - z + 6 = 0$.

A12 Dans un repère orthonormé :

(E_1) est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $y = 2x + 5$,
 (E_2) est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x = 3$.
Déterminer la nature des ensembles (E_1) et de (E_2) .

A13 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$ on considère le plan $\mathcal{P} : 2x - 3y - 2z + 3 = 0$ et on note \mathcal{D} la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 5t \\ z = 6 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Justifier que \mathcal{D} et \mathcal{P} sont sécants puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
Rép $(1; -3; 7)$

A14 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$ $\mathcal{P} : 2x - 5y + 3z - 2 = 0$ et la droite \mathcal{D} admet pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = 9 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}),$$
 montrer que $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$.

D Projeté orthogonal d'un point sur un plan, sur une droite

- \mathcal{P} est un plan et A un point de l'espace :
 - si $A \in \mathcal{P}$ alors le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} est A lui-même,
 - si $A \notin \mathcal{P}$ alors la droite orthogonale à \mathcal{P} passant par A coupe \mathcal{P} en un point H appelé **projeté orthogonal** du point A **sur le plan** \mathcal{P} .
- \mathcal{D} est une droite et A un point de l'espace :
 - si $A \in \mathcal{D}$ alors le projeté orthogonal de A sur \mathcal{D} est A lui-même,
 - si $A \notin \mathcal{D}$ alors le plan perpendiculaire à \mathcal{D} passant par A coupe \mathcal{D} en un point H appelé **projeté orthogonal** du point A **sur la droite** \mathcal{D} .

A15 Dans un $\mathcal{R.O.N.}$, \mathcal{P} est le plan d'équation $5x + 2y + 4z - 5 = 0$, $A(\frac{7}{2}; 3; 1)$, \mathcal{D} est la droite passant par A et orthogonale à \mathcal{P} , H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} .

1. Montrer que $A \notin \mathcal{P}$ et donner une représentation paramétrique de \mathcal{D} .
2. Déterminer les coordonnées de H .
Rép : $H(1; 2; -1)$
3. Vérifier que $H = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

D distance d'un point à un plan

Soient A un point, \mathcal{P} un plan, H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} .

La distance du point A au plan \mathcal{P} est la distance AH .

Cette distance est le minimum de la distance entre A et un point de \mathcal{P} .

D distance d'un point à une droite

Soient A un point, \mathcal{D} une droite, H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{D} .

La distance du point A à la droite \mathcal{D} est la distance AH .

Cette distance est le minimum de la distance entre A et un point de \mathcal{D} .

F Dans l'espace muni d'un repère orthonormé de l'espace on donne un

point A et un plan \mathcal{P} de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors :

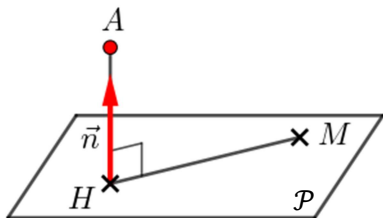
$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

A16 On souhaite démontrer la formule précédente.

Dans un $\mathcal{R. O. N.}$ on donne un point $A(x_A; y_A; z_A)$ de l'espace, un plan \mathcal{P}

d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, un point

$M(x_M, y_M, z_M) \in \mathcal{P}$, on note H le projeté orthogonal de A sur le plan \mathcal{P} :



1. Montrer que : $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$ (*).
2. En utilisant $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, montrer que $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$ (**).
3. Dédire de (*) et (**) que :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

puis conclure.

A17 Dans un $\mathcal{R. O. N.}$ on donne $A(-3; -6; -1)$ et on note \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne : $x + 3y + 3z - 14 = 0$.

Déterminer la distance du point A au plan \mathcal{P} .

Rep : $2\sqrt{19}$

A18 On reprend les données de l'activité A15 : dans un $\mathcal{R. O. N.}$, \mathcal{P} est le plan d'équation $5x + 2y + 4z - 5 = 0$ et $A(\frac{7}{2}; 3; 1)$.

En appliquant la formule du cours, retrouver que : $d(A, \mathcal{P}) = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.