ACTIVITES 11. Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace [Thiaude P.]

On suppose choisie une unité de distance.

D définition du produit scalaire

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0}\text{, alors : } \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \\ \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0}\text{, alors : } \vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v}) \end{cases}$$

Conséquence :

Si $A\neq B$ et $A\neq C$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

P produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, alors :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de même sens :** $\vec{u}\cdot\vec{v}=+\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de sens contraires** : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

P linéarité et symétrie

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel, alors :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\times\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\times\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie)

D carré scalaire

Le **carré scalaire** de $\vec{u}$ est le réel positif : $\vec{u}^2 \overset{\text{def}}{=} \vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.

En particulier : $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$.

F identités remarquables

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

F produit scalaire dans un triangle

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}[AB^2+AC^2-BC^2]$

le point commun dans les deux vecteurs est en « première position »

D droites orthogonales, vecteurs orthogonaux

- deux droites sont **orthogonales** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires
- deux droites sont **perpendiculaires** $\Leftrightarrow$ elles sont orthogonales et ont un point en commun
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ l'un au moins des vecteurs est nul ou les droites (AB) et (CD) sont orthogonales
- on écrit $d\perp d'$ pour indiquer que d et d' sont orthogonales
- on écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$ pour indiquer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
- $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace
- $d\perp d' \Leftrightarrow d'\perp d$, et : $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{u}$

P théorème fondamental

▶ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

P droite orthogonale à une droite ou à un plan

▶ $\mathcal{D}(A;\vec{u})\perp\mathcal{D}(B;\vec{v})\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

▶ $\mathcal{D}(A;\vec{u})\perp\mathcal{P}(B;\vec{v},\vec{w})\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$ et $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}=0$

D base ou repère orthogonal/orthonormé(e)

- la **base** $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est **orthogonale** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}$ et $\vec{\imath}\perp\vec{k}$ et $\vec{\jmath}\perp\vec{k}$
- le **repère** $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est **orthogonal** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}$ et $\vec{\imath}\perp\vec{k}$ et $\vec{\jmath}\perp\vec{k}$
- la **base** $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est **orthonormée** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases}\vec{\imath}\perp\vec{\jmath} \text{ et } \vec{\imath}\perp\vec{k} \text{ et } \vec{\jmath}\perp\vec{k} \\ \|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|=1\end{cases}$
- le **repère** $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est **orthonormé** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases}\vec{\imath}\perp\vec{\jmath} \text{ et } \vec{\imath}\perp\vec{k} \text{ et } \vec{\jmath}\perp\vec{k} \\ \|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|=1\end{cases}$

$\boxed{F}$ **dans un repère orthonormé**

Dans un repère orthonormé $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$:

▶ $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'}$

▶ $\boldsymbol{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

▶ $\boldsymbol{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$

☐ **A01** Dans un repère orthonormé, on donne :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\m\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$$

Déterminer m sachant que $\vec{u}\perp\vec{v}$.

☐ **A02** Dans un repère orthonormé : $A(-3;4;1)$, $B(5;1;3)$ et $C(0;4;3)$: calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Rep=28

☐ **A03** Dans un repère orthonormé, $\mathcal{D}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ une droite de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\5\\-2\end{pmatrix}$.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles orthogonales ?

☐ **A04** Dans un repère orthonormé : $A(1\,;-2\,;\,7)$, $B(3\,;\,-1\,;10)$ et $C(-4\,;5\,;8)$. Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

☐ **A05** Dans un repère orthonormé : $A(3;1;-5)$, $B(5;5;-1)$,$C(7;3,-9)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

☐ **A06** Dans un repère orthonormé : $A(1\,;-1\,;2)$, $B(0;-2;1)$, $C(2;3;0)$, la droite $\mathcal{D}$ passe par $E(3;2;1)$ et admet $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Montrer que $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (ABC).

$\boxed{M}$ **détermination de la mesure d'un angle**

Dans un repère orthonormé on donne : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.

De $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ on dédit :

$$\boldsymbol{\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}}$$

En utilisant la calculatrice on en déduit une valeur approchée de $(\vec{u},\vec{v})$, parfois la valeur exacte de ce angle.

$\boxed{F}$ **formules de polarisation**

- $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2]}$
- $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2]}$
- $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2]}$

$\boxed{D}$ **vecteur normal à un plan**

$\vec{n}$ est **normal** à un plan $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{n}$ est vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan

$\boxed{i}$ un vecteur normal est toujours différent de $\vec{0}$

$\boxed{P}$ Soit $\vec{n}\neq\vec{0}$, alors on a l'équivalence :

▶ **$\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}(A;\vec{u},\vec{v})$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.**

☐ **A07** Dans un repère orthonormé on note $\mathcal{P}$ le plan qui passe par $A(2;3;1)$ et admet pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

☐ **A08** Dans un repère orthonormé, $\mathcal{Q}$ est le plan qui passe par $A(0;5;2)$ et admet pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, et $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\\12\end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{w}$ est un vecteur normal à $\mathcal{Q} \Leftrightarrow a=-5$ et $b=-4$.

$\boxed{P}$ **vecteur normal dans un repère orthonormé**

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, alors :

▶ $\boldsymbol{M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0}$

▶ $\boldsymbol{M(x;y;z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0}$ **où** $\boldsymbol{d=-ax_A-by_A-cz_A}$

$\boxed{D}$ **équation cartésienne d'un plan**

Dans un repère orthonormé, on se donne a, b et c non tous nuls, alors $\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$ est une équation d'un plan $\mathcal{P}$ dont $\boldsymbol{\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}$ est un vecteur normal.

On dit que $ax+by+cz+d=0$ est une **équation cartésienne** de $\mathcal{P}$.

☐ **A09** un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\1\\4\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

☐ **A10** Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}: -x+y+2z+5=0$.
Le point $A(1;4;3)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

☐ **A11** Dans un repère orthonormé : $A(1;2;3)$, $B(5;1;1)$ et $E(0;4;6)$.
Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ tel que $(AB)\perp\mathcal{P}$ et $E\in\mathcal{P}$.

Rép : $4x-y-2z+16=0$

☐ **A12** Dans un repère orthonormé : $A(8;0;5)$ et $B(2;4;3)$. Montrer que le plan médiateur de $[AB]$ admet pour équation $-3x+2y-z+15=0$.

☐ **A13** Dans un repère orthonormé, droite $\mathcal{D}: \begin{cases}x= 5-t\\ y= 2+3t\\ z=-8+2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.
Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}\perp\mathcal{D}$ passant par $A(1\,;2;3)$.

Rép : $-x+3y+2z-11=0$

☐ **A14** Dans un repère orthonormé, déterminer une équation du plan $\mathcal{Q}$ passant par $A(1;2;4)$ et parallèle au plan $\mathcal{P}: 3x+5y-z+6=0$.

☐ **A15** Dans un repère orthonormé :

(E) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que : $y=2x+5$,
(F) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que : $x=3$.

Déterminer la nature des ensembles (E) et de (F).

☐ **A16** Dans un repère orthonormé, déterminer l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $(x-2y)^2=z^2+2z+1$.

☐ **A17** Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}: 2x-3y-2z+3=0$ et $\mathcal{D}$ est la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases}x= 3+2t\\ y=2+5t\\ z= 6-t\end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$.

Justifier que la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. Rép $(1\,;-3\,;7)$

☐ **A18** Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}: 2x-5y+3z-2=0$ et $\mathcal{D}$ est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=5+4t\\ y=1+t\\ z=9-t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

$\boxed{D}$ **Projeté orthogonal d'un point sur un plan, sur une droite**

- soit A un point et $\mathcal{P}$ un plan : la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par A possède un et un seul point H en commun avec le plan $\mathcal{P}$: H est le **projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$**.
- soit A un point et $\mathcal{D}$ une droite : le plan perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et passant A possède un et un seul point en commun H avec la droite $\mathcal{D}$: H est le **projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$**.

☐ **A19** Dans un repère orthonormé déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ avec $A(\frac{7}{2};3;1)$ et $\mathcal{P}: 5x+2y+4z-5=0$.

Rep : $H(1;2;-1)$

$\boxed{D}$ **distance d'un point à un plan ou une droite**

Soient A un point, $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{D}$ une droite alors :

• la **distance du point A au plan** $\mathcal{P}$ est la plus petite distance entre A et un point de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire le minimum de $\{AM, M \in \mathcal{P}\}$

• la **distance du point A à la droite** $\mathcal{D}$ est la plus petite distance entre A et un point de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire le minimum de $\{AM, M \in \mathcal{D}\}$.

Ces distances se notent respectivement $d(A;\mathcal{P})$ et $d(A;\mathcal{D})$.

☐ **A20** Dans un repère orthonormé on donne : $A(-1;2;3)$, $B(-1;4;1)$, $C(2;-1;5)$ et $D(-3;-6;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en déduire que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) puis donner une équation de ce plan.
3. Montrer que le point D n'appartient pas au plan (ABC) puis calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur (ABC).
4. Dans cette question, on admet que : $H(-1;0;5)$.
   En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est $2\sqrt{19}$.

$\boxed{P}$ Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de ce plan le plus proche du point A :

$$\boldsymbol{d(A,\mathcal{P}) = AH} \textbf{ où } \boldsymbol{H} \textbf{ est le projeté orthogonal de } \boldsymbol{A} \textbf{ sur } \boldsymbol{\mathcal{P}}$$

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite $\mathcal{D}$ est le point de cette droite le plus proche du point A :

$$\boldsymbol{d(A,\mathcal{D}) = AH} \textbf{ où } \boldsymbol{H} \textbf{ est le projeté orthogonal de } \boldsymbol{A} \textbf{ sur } \boldsymbol{\mathcal{D}}$$

On a les équivalences : $A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(A;\mathcal{P}) = 0$ et $A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow d(A;\mathcal{D}) = 0$.

$\boxed{F}$ Dans l'espace muni d'un repère orthonormé de l'espace on donne un point A et un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, alors :

$$\boldsymbol{d(A;\mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

☐ **A21** Dans un repère orthonormé de l'espace, $A(-3;-6;-1)$ et $\mathcal{P}: x+3y+3z-14=0$. Donner la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

Rep : $2\sqrt{19}$

☐ **A22** On souhaite démontrer la formule précédente.
Dans un repère orthonormé, on considère un point A de l'espace, $M(x,y,z)$ un point quelconque de $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$ dont $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal, H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

1. Montrer que $|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$ $(*)$.
2. En utilisant $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, montrer que : $|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$$(**)$.
3. Déduire de $(*)$ et $(**)$ que :
$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
   Conclure.