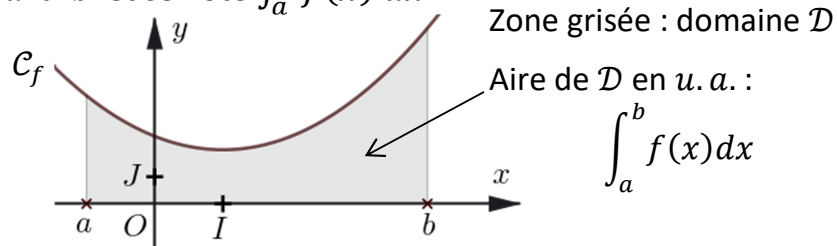


D quelques définitions

- le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ l'**unité d'aire** est l'**aire du rectangle OIKJ** avec $K(1; 1)$
- f définie sur un intervalle I est **positive sur I** $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq 0$: graphiquement, la partie correspondante de $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** (au sens large) de l'axe des abscisses
- on définit de même une **fonction négative**, **strictement positive** et enfin **strictement négative sur I**
- pour f continue positive sur $[a; b]$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire u. a. s'appelle **intégrale** de f de a à b et se note $\int_a^b f(x) dx$:



On a donc :

$$\int_a^b f(x) dx \text{ (u. a.)} = \text{aire de } \mathcal{D}$$

Les réels a et b sont les **bornes de l'intégrale**, la lettre x est une **variable muette** :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\theta) d\theta = \dots$$

On convient que :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

A01 Déterminer :

$$\int_1^3 5 dx$$

Théorème fondamental

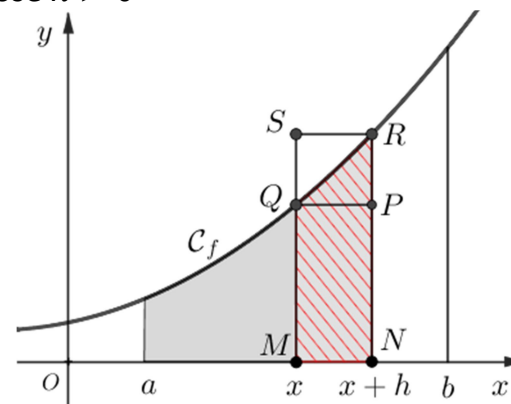
Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a; b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a; b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est la primitive de f sur $[a; b]$ telle que $F_a(a) = 0$, autrement dit : $\forall x \in [a; b], F'_a(x) = f(x)$ et $F_a(a) = 0$.

A02 On souhaite justifier le théorème fondamental dans le cas particulier où f est continue positive croissante sur $[a; b]$. Soit $x \in [a; b]$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in [a; b]$.

1. On suppose $h > 0$



a. Exprimer les aires des rectangle $MNPQ$ et $MNRS$ en fonction de h , $f(x)$ et $f(x+h)$.

b. En déduire que :

$$h \times f(x) \leq F_a(x+h) - F_a(x) \leq h \times f(x+h)$$

puis justifier que :

$$f(x) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x+h) \quad (*)$$

Pour $h < 0$ on montrerait de même que :

$$f(x+h) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x) \quad (**)$$

2. Déterminer :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

En déduire que F_a est dérivable en x de nombre dérivé $f(x)$.
Interpréter en terme de primitive, justifier que $F_a(a) = 0$ et conclure.

[i] On admet la généralisation à une fonction continue et positive sur $[a; b]$ non nécessairement croissante sur cet intervalle :

[F] ☐ Lien entre intégrale et primitive

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, F une primitive au choix de f sur cet intervalle $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

☐ **A03** [preuve] Pour tout $x \in [a; b]$, on pose :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

On note F une primitive (au choix) de f continue positive sur $[a; b]$.

1. Justifier qu'il existe une constante réelle k tel que :

$$\forall x \in [a; b], F(x) = F_a(x) + k$$

2. Montrer que : $k = F(a)$.

3. En déduire que pour tout $x \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

Ecrire cette égalité pour $x = b$, conclure.

4. Montrer que si H est une autre primitive de f sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t) dt = [H(x)]_a^b$$

☐ **A04** Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^1 x^2 + 1 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^2 e^{2x} + 1 dx$$

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP $\int_0^1 (x^2+1) dx \rightarrow \text{Frac}$ $\int_0^2 (e^{2x}+1) dx = \frac{e^4+3}{2}$	1 Intégrale($x^2+1,0,1$) $\rightarrow \frac{4}{3}$ 2 Intégrale($\exp(2x)+1,0,2$) $\rightarrow \frac{e^4+3}{2}$
---	--

☐ **A05** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x + 1$ et $F(x) = xe^x + x$.
Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, en déduire $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP CALC INTÉGRALE POUR INTERVALLE $\int_{-1}^0 f(x) dx = 1.3678794$	NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP $\int_{-1}^0 (Y_1) dx = 1 + \frac{1}{e}$ $\int_{-1}^0 (Y_1) dx$ 1.367879441
--	---

□ **A06** Calculer les intégrales :

$$A = \int_{-1}^4 \pi \, dx \quad B = \int_{-1}^2 (x + 3) \, dx \quad C = \int_0^1 (3x^2 + x) \, dx$$

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) \, dx \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx$$

□ **A07** Calculer :

$$I = \int_1^3 3x(x^2 + 5)^2 \, dx$$

[D] Soit f continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Pour tous a et b appartenant à I on appelle **intégrale de a à b de f** le réel noté $\int_a^b f(x) \, dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[F] f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , a , b et c sont trois nombres appartenant à cet intervalle, λ est une constante réelle :

$$(1) \int_a^a f(x) \, dx = 0 \quad (2) \int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

$$(3) \int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx$$

$$(4) \int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

$$(5) \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (\text{relation de Chasles})$$

□ **A08** Démontrer les cinq formules précédentes.

□ **A09** Calculer $I + K$ et K , en déduire I .

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \, dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$$

□ **A10** $\forall x \in [1; 5], f(x) = |x - 2|$.

Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue (discuter) puis calculer :

$$\int_1^5 |x - 2| \, dx$$

[F] f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b sont des nombres appartenant à cet intervalle tels que $a \leq b$:

(6) si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ (positivité)

(7) si $f \geq g$ sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$

□ **A11** Démontrons les affirmations (6) et (7).

- on suppose f continue positive sur $[a; b]$, on note F une primitive au choix de f sur cet intervalle : quel est le sens de variation de F sur $[a; b]$? En déduire (6).
- on suppose f et g continues sur $[a; b]$ et $f \geq g$ sur cet intervalle : que dire du signe de $f - g$ sur $[a; b]$? En déduire (7).

⚡ Attention

- si $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$, on ne peut pas en déduire que f est positive sur $[a; b]$
- si $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$, on ne peut pas en déduire que $f \geq g$ sur $[a; b]$
- le sens des relations d'ordre est préservé lorsque l'on intègre dans l'ordre croissant des bornes

□ **A13**

1. Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$ on a :

$$-\frac{1}{2}x + 1 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

2. En déduire un encadrement de :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

F □ **intégration par parties**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I , alors pour tous nombres a et b appartenant à I , on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

□ **A14** Démontrons la formule d'intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I à dérivées u' et v' continues sur I , a et b deux nombres appartenant à I .

1. Vérifier que, pour tout $x \in I$:

$$(uv)'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$$

2. Calculer de deux façons différentes :

$$I = \int_a^b ((uv)'(x) - u'(x)v(x)) dx$$

puis conclure.

□ **A15** [COR] A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$A = \int_0^1 xe^x dx \quad B = \int_0^1 (2x+1)e^x dx \quad C = \int_1^e \ln(x) dx$$

$$D = \int_1^e x \ln(x) dx \quad E = \int_0^1 xe^{-x} dx \quad F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$$

A	B	C	D	E	F
1	$e+1$	1	$\frac{e^2+1}{4}$	$1-\frac{2}{e}$	$\frac{\pi}{2}-1$

P **Calcul d'une aire**

On notet $\mathcal{D}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ dans un repère orthogonal du plan :

• **cas d'une fonction continue gardant un signe constant**

– si f est continue positive sur $[a; b]$:

$$\text{Aire de } \mathcal{D} = \int_a^b f(x) dx \text{ u. a.}$$

– si f est continue négative sur $[a; b]$:

$$\text{Aire de } \mathcal{D} = - \int_a^b f(x) dx \text{ u. a.}$$

• **cas d'une fonction changeant de signes**

si f est continue et change de signe sur $[a; b]$,

alors on découpe $[a; b]$ en sous intervalles sur chacun desquels f garde un signe constant puis on calcule des intégrales relatives aux sous intervalles

• **domaine situé entre deux courbes**

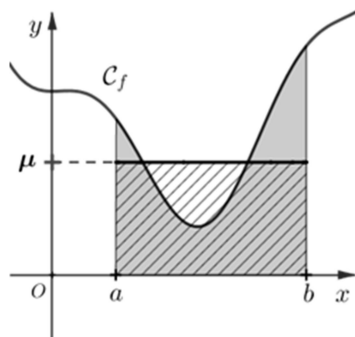
si $f \geq g$ sur $[a; b]$ alors l'aire du domaine **délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation respectives $x = a$ et $x = b$** est :

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ u. a.}$$

[D] Valeur moyenne

Soit f continue sur I , a et b appartenant à I tels que $a < b$, la **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a ; b]$ est le réel :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



[i] La valeur moyenne de f entre a et b est souvent notée : μ ou μ_f ou $\mu_{f,a,b}$ lorsqu'un risque de confusion existe.

On munit le plan d'un repère orthogonal, si f est continue et positive sur $[a ; b]$ alors la valeur moyenne μ est la hauteur du rectangle de base $[a ; b]$ ayant même aire que le domaine $\mathcal{D}$ du plan délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Sur la figure le domaine grisé et le rectangle hachuré ont même aire.

□ **A16** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.
Déterminer la valeur moyenne de f sur $[-1 ; 3]$.

[P] Soit f une fonction continue sur un intervalle I , pour des raisons de symétrie de la courbe de f :

• si f est **paire**, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

• si f est **impaire**, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

• méthode des rectangles

Soit f continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On partage $[a ; b]$ en n sous intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ de même largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ où $x_k = a + k \times \Delta x$ avec $k \in \{0 ; 1 ; \dots ; n-1\}$:

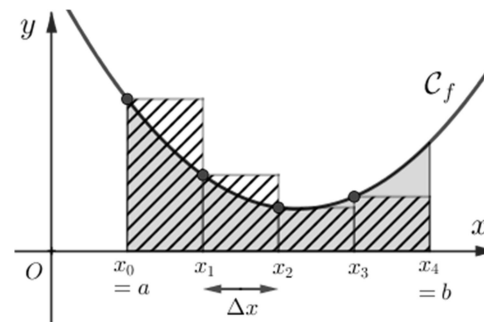


figure obtenue pour $n = 4$

Sur $[x_k, x_{k+1}]$ l'aire du domaine situé sous C_f est «proche» de l'aire du rectangle de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$, l'aire de ce rectangle égale à $f(x_k) \times \Delta x$, donc l'aire du domaine situé entre C_f , (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est proche de :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

(admis) Lorsque $n \rightarrow +\infty$, cette somme converge vers l'aire de $\mathcal{D}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

cette remarque est à l'origine de la notation $\int_a^b f(x) dx$, le symbole $\int$ ressemblant à la première lettre du mot latin «summa».

• volume d'un solide de révolution

un solide obtenu par révolution autour de l'axe des abscisses de la courbe de f continue sur $[a ; b]$ a pour volume (en u. v.) :

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$