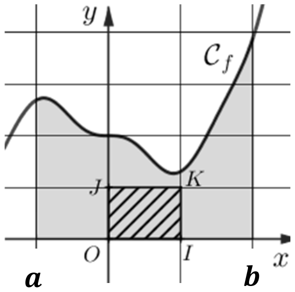
$\boxed{D}$ • le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$: l'**unité d'aire** est l'**aire du rectangle $OIKJ$** avec $K(1\,;1)$

• f définie sur un intervalle I est **positive sur I** $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geqslant 0$: graphiquement la partie correspondante de $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus, au sens large, de l'axe des abscisses du repère

• on définit de même une **fonction négative**, **strictement positive** et enfin **strictement négative sur I**.

• Soit f continue positive sur $[a\,;b]$.
L'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = \boldsymbol{a}$ et $x = \boldsymbol{b}$, exprimée en unité d'aire, s'appelle **intégrale de a à b de f** et se note :



$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$$

Si $\mathcal{D}$ désigne ce domaine du plan, on a :

$$\textit{aire de } \mathcal{D} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} \ \ \textit{unités d'aire}$$

Les réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont les **bornes de l'integrale** ; la lettre x est une **variable muette**, elle peut être remplacée par une autre lettre :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\theta)\,d\theta = \cdots$$

On convient que :

$$\int_a^a \boldsymbol{f(x)\,dx = 0}.$$

A01 Déterminer :

$$I = \int_1^3 5\,dx$$

Théorème fondamental

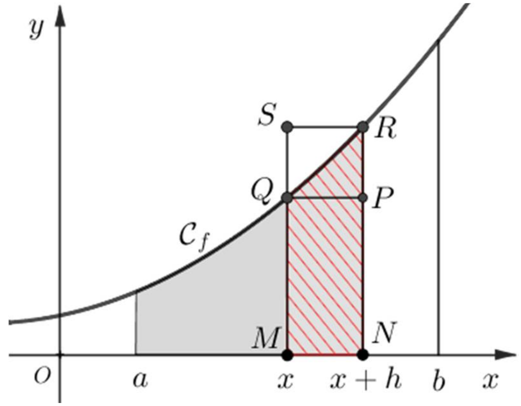
Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a\,;b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a\,;b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f sur $[a\,;b]$ s'annulant en a, autrement dit :
$\forall x \in [a\,;b], F_a'(x) = f(x)$ et $F_a(a) = 0$.

A02 On souhaite justifier le théorème fondmental dans le cas où f est continue positive et croissante sur $[a\,;b]$.
Soit $x \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in [a\,;b]$.

1. On suppose $h > 0$



a. Exprimer les aires des rectangle $MNPQ$ et $MNRS$ en fonction de h, $f(x)$ et $f(x+h)$.

b. En déduire que :

$$h \times f(x) \leqslant F_a(x+h) - F_a(x) \leqslant h \times f(x+h)$$

puis justifier que :

$$f(x) \leqslant \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leqslant f(x+h) \ \ (*)$$

Pour $h < 0$ on montrerait de même que :

$$f(x+h) \leqslant \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leqslant f(x) \ (**)$$

2. Déterminer :
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}$$
En déduire que F_a est dérivable en x de nombre dérivé $f(x)$.
Interpréter en terme de primitive, justifier que $F_a(a)=0$ et conclure.

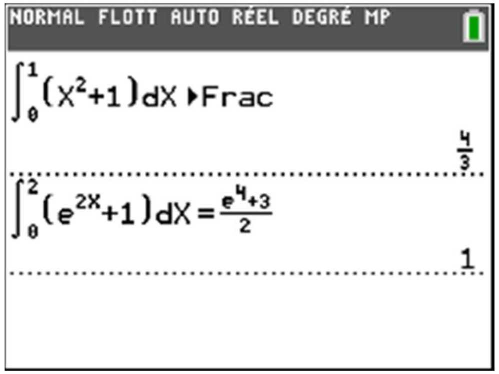
$\boxed{i}$ On admet la généralisation à une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ non nécéssairement croissante sur cet intervalle :

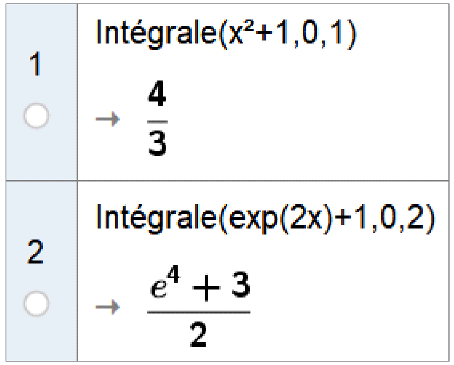
$\boxed{F}$ **Lien entre intégrale et primitive**
Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ et F une primitive au choix de f sur cet intervalle, alors :
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

☐ **A03** [preuve] Pour tout $x \in [a\,;b]$, on pose :
$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
On note F une primitive (au choix) de f continue positive sur $[a\,;b]$.

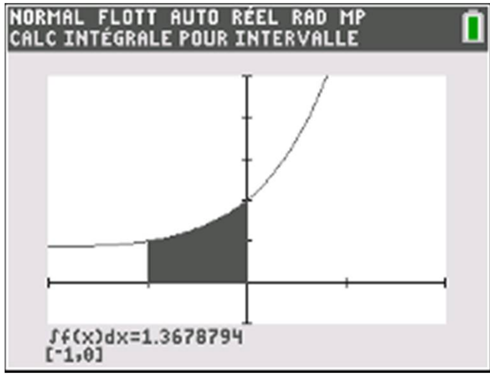
1. Justifier qu'il existe une constante réelle k tel que :
$$\forall x \in [a\,;b], F(x) = F_a(x) + k$$
2. Montrer que : $k = F(a)$.
3. En déduire que pour tout $x \in [a\,;b]$, on a :
$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$
Ecrire cette égalité pour $x = b$, conclure.
4. Montrer que si H est une autre primitive de f sur $[a\,;b]$:
$$\int_a^b f(t)\,dt = [H(x)]_a^b$$

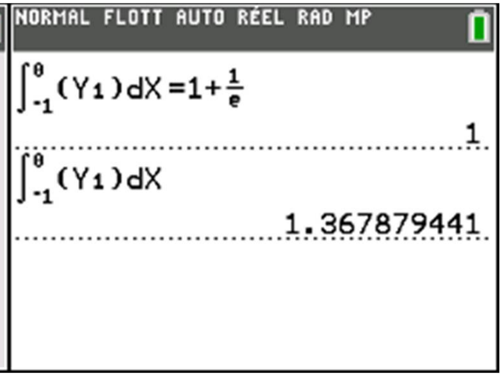
☐ **A04** Calculer les intégrales :
$$I = \int_0^1 x^2+1\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^2 e^{2x}+1\,dx$$





☐ **A05** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x + 1$ et $F(x) = xe^x + x$.
Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, en déduire :
$$I = \int_{-1}^0 f(x)dx$$





☐ **A06** Calculer les intégrales :
$$A = \int_{-1}^4 \pi\,dx \qquad B = \int_{-1}^2 (x+3)\,dx \qquad C = \int_0^1 (3x^2+x)\,dx$$
$$D = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\,dx \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$$

☐ **A07** Calculer :

$$I=\int_1^3 3x(x^2+5)^2\,dx$$

$\boxed{D}$ Soit f continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Pour tous a et b appartenant à I on appelle **intégrale de a à b de f** le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

$\boxed{F}$ f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c sont trois nombres appartenant à cet intervalle, λ est une constante réelle :

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$ (2) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ (relation de Chasles)

☐ **A08** Démontrer les cinq formules précédentes.

☐ **A09** Calculer $I+K$ et K, en déduire I.

$$I=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}\,dx \quad \text{et} \quad K=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

☐ **A10** $\forall x\in[1;5]$, $f(x)=|x-2|$.
Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue (discuter) puis calculer :

$$\int_1^5 |x-2|\,dx$$

$\boxed{F}$ f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b sont des nombres appartenant à cet intervalle tels que $a\leqslant b$:

(6) si $f\geqslant 0$ sur $[a;b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$ (positivité)

(7) si $f\geqslant g$ sur $[a;b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_a^b g(x)\,dx$

☐ **A11** Démontrons les affirmations (6) et (7).

- on suppose f continue positive sur $[a;b]$, on note F une primitive au choix de f sur cet intervalle : quel est le sens de variation de F sur $[a;b]$? En déduire (6).
- on suppose f et g continues sur $[a;b]$ et $f\geqslant g$ sur cet intervalle. Que dire du signe de $f-g$ sur $[a;b]$? En déduire (7).

Attention

- si $\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$, on ne peut pas en déduire que f est positive sur $[a\,;b]$
- si $\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_a^b g(x)\,dx$, on ne peut pas en déduire que $f\geqslant g$ sur $[a\,;b]$
- le sens des relations d'ordre est préservé lorsque l'on intègre dans l'ordre **croissant** des bornes

☐ **A13**

1. Démontrer que pour tout $x\in[0;1]$ on a :

$$-\frac{1}{2}x+1\leqslant\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1$$

2. En déduire un encadrement de :

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$\boxed{F}$ intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I, alors pour tous nombres a et b appartenant à I, on a :

$$\int_a^b \boldsymbol{u(x)v'(x)\,dx} = [\boldsymbol{u(x)v(x)}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u'(x)v(x)\,dx}$$

☐ **A14** Démontrons la formule d'intégration par parties.
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I à dérivées u' et v' continues sur I, a et b deux nombres appartenant à I.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b \big((u \times v)'(x) - u'(x)v(x)\big)\,dx$$

2. Calculer de deux façons différentes :

$$\int_a^b \big((u \times v)'(x) - u'(x)v(x)\big)\,dx$$

puis conclure.

☐ **A15** [COR] On pose :

$$A = \int_0^1 xe^x\,dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 (2x+1)e^x\,dx$$

A l'aide d'une intégration par parties, calculer A, en déduire B.

☐ **A16** [COR] À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$C = \int_1^e \ln(x)\,dx \quad \text{et} \quad D = \int_1^e x\ln(x)\,dx$$

☐ **A17** [COR] A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$E = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$$

☐ **A18** [COR] A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$$

A	B	C	D	E	F
1	$e+1$	1	$\frac{e^2+1}{4}$	$1-\frac{2}{e}$	$\frac{\pi}{2}-1$

$\boxed{P}$ Calcul d'une aire

On notet $\mathcal{D}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ dans un repère orthogonal du plan :

• si f est **continue positive** sur $[a\,;b]$:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{ire\ de\ }\mathcal{D} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx\ \ u.a.}$$

• si f est **continue négative** sur $[a\,;b]$:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{ire\ de\ }\mathcal{D} = -\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx\ \ u.a.}$$

• si f est continue et change de signe sur $[a\,;b]$, alors on découpe $[a\,;b]$ en sous intervalles sur chacun desquels f garde un signe constant puis on calcule l'intégrale de a à b de f à partir des différentes intégrales relatives à ces sous intervalles

• si $\boldsymbol{f \geqslant g}$ sur $[a\,;b]$ alors l'aire du domaine **délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$** et les **droites d'équation respectives $x = a$ et $x = b$** est :

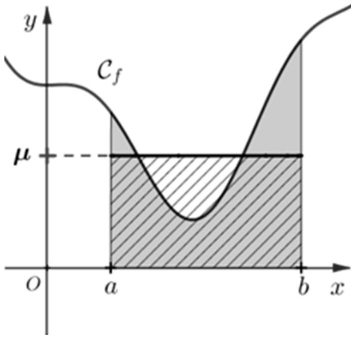
$$\int_a^b \boldsymbol{(f(x) - g(x))\,dx\ \ u.a}$$

$\boxed{D}$ **Valeur moyenne**

Soit f continue sur I, a et b appartenant à I tels que $a < b$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le réel :

$$\boldsymbol{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$



On munit le plan d'un repère orthonormé :
si f est continue et positive sur $[a\,;b]$ alors la valeur moyenne μ est la hauteur du rectangle de base $[a\,;b]$ ayant même aire que le domaine du plan délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abcisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. (*Sur la figure, le domaine grisée et le rectangle hachuré ont la même aire*)

$\boxed{P}$ Soit f une fonction continue sur un intervalle I

- si f est **paire**, alors :

$$\boldsymbol{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx}$$

- si f est **impaire**, alors :

$$\boldsymbol{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx}$$

☐ **A19** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-1\,;3]$.