

ACTIVITES 09. Primitives et équations différentielles

[D] f et F sont définies sur un intervalle I , F est dérivable sur I :

F est une **primitive** de f sur $I \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

En parlant des expressions on dit parfois « une primitive de $f(x)$ sur I est $F(x)$ ».

A01 On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x + 3, g(x) = e^{-x} + 5, h(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}$$

A02 Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x \ln(x) - x$.
Montrer que g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

[P] quelques propriétés

Soit I un intervalle.

- ▶ on a l'équivalence : $\forall x \in I, f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I
- ▶ si f est continue sur I alors elle admet des primitives sur I et deux d'entre-elles diffèrent d'une constante :
si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, F_1(x) = G(x) + k$.

A03 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - 3x^2$, déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$
puis la primitive F_0 de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F_0(1) = 5$.

[F] f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I , λ et a sont des constantes réelles, n est un entier naturel alors :

- une **primitive de $f + g$** est $F + G + k$
 - une **primitive de $f - g$** est $F - G + k$
 - une **primitive de $\lambda \times f$** est $\lambda \times F + k$
- (k est une constante réelle)

[D] a est une constante réelle et n un entier naturel, alors :

- une primitive de a est $ax + k$
- une primitive de 0 est k
- une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
- une primitive de x est $\frac{1}{2}x^2 + k$

(k est une constante réelle)

A04 Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$ avec :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 5x + 7$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 5)^2$

[F] Soit $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$:

- une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
- une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x} + k$ (sur $]0; +\infty[$)
- une primitive de e^x est $e^x + k$ (sur $\mathbb{R}$)
- une primitive de e^{-x} est $-e^{-x} + k$ (sur $\mathbb{R}$)
- une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x) + k$ (sur $\mathbb{R}$)
- une primitive de $\cos(x)$ est $\sin(x) + k$ (sur $\mathbb{R}$)
- une primitive de $u'u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$
- u ne s'annulant pas sur I ,
une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u} + k$

(k est une constante réelle)

A05 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f et g définies par :

$$f(x) = e^x - x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 7\cos(x) + 5$$

A06 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f , g et h définies par :

$$f(x) = 2x(x^2 + 5)^4 \quad g(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} \quad h(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

A07 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f , g et h définies par :

$$f(x) = 7x^2(x^3 - 1)^2 \quad g(x) = \frac{5x}{(x^2 + 7)^2} \quad h(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 2)^2}$$

[F] avec une exponentielle

- $a \neq 0$ et b constantes, une primitive de e^{ax+b} est $\frac{1}{a}e^{ax+b} + k$
- u dérivable sur un intervalle I , une primitive de $u'e^u$ est $e^u + k$ (k est une constante réelle)

A08 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f , g et h définies par :

$$f(x) = e^{-x} + 3 \quad g(x) = e^{4x-1} \quad h(x) = e^{-2x+1}$$

A09 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f , g et h définies par :

$$f(x) = xe^{x^2-1} \quad g(x) = 5xe^{-x^2+3} \quad h(x) = x^2e^{x^3+2}$$

A10 Pour tout réel x , $f(x) = xe^x$.

Chercher une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$.

En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

[F] Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I :

- si $u > 0$ sur I , une primitive de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ est $\sqrt{u} + k$
- une primitives de $u' \cos(u)$ est $\sin(u) + k$
- une primitive de $u' \sin(u)$ est $-\cos(u) + k$ (k est une constante réelle)

A11 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f et g définies par :

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} \quad g(x) = 3 \cos(2x + 1)$$

[F] u à valeurs strictement positives sur I :

une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(u) + k$

(k est une constante réelle)

A12 Déterminer les primitives sur $]2; +\infty[$ de f définie par :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$$

[D] équation différentielle du premier ordre

Une **équation différentielle** du premier ordre d'inconnue y sur un intervalle I est une équation portant sur une fonction y et sa dérivée première y' . Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = 5y(x) + x^3$ est une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ du premier ordre d'inconnue y , elle s'écrit aussi plus simplement : $y' = 5y + x^3$.

A13 On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = -2x + 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = e^{2x} + x$, $h(x) = g(x) + 1$:

g est-elle une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ? Et h ?

Équation différentielle $y' = ay$, a constante

[D] L'équation $y' = ay$ qui s'écrit aussi $y' - ay = 0$ est une **équation différentielle homogène** à coefficients constants.

[F] ☐ Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

[i]  Les solutions de $y' = ay$ sont définies à une constante multiplicative près, non à une constante additive.

A14 On se propose de démontrer la formule précédente.

Soit a une constante réelle, on considère l'équation différentielle homogène $(E_0) : y' = ay$.

étape 1 : toute fonction $x \mapsto Ce^{ax}$ est une solution de (E_0)

Soit C une constante et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$: vérifier que f est une solution de (E_0) .

étape 2 : toute solution de (E_0) peut s'écrire $x \mapsto Ce^{ax}$

Soit f une solution de (E_0) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.

Démontrer que g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, conclure.

P Soit k une constante réelle, $(E_0) : y' = ay$, alors :

- si y_1 et y_2 sont des solutions de (E_0) , alors la fonction $y_1 + y_2$ est une solution de (E_0)
- si k est une constante réelle et y_1 une solution de (E_0) , alors $k \times y_1$ est une solution de (E_0)

A15 Démontrer les deux points de la propriété précédente.

A16 Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$.

A17 Sans rédiger, donner la solution générale de chacune des équations différentielles : 1. $y' + 2y = 0$ 2. $y' = y$

A18 Donner toutes les solutions de $y' = -y$ puis déterminer la solution f vérifiant $f(1) = e^2$.

D L'équation différentielle $y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$ est une **équation différentielle** à coefficients constants **avec second membre constant**.

F $\square$ $a \neq 0$ et b étant des constantes, les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une constante.

On dit aussi que la **solution générale** est $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

A19 Démontrer la solution générale de $y' = ay + b$.

A20 Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3$.

D $y' = ay + f$ ou $y' - ay = f$ avec f fonction continue sur $\mathbb{R}$ est une **équation différentielle** à coefficients constants **avec second membre non constant** (lorsque f est non constante).

F $(E) : y' = ay + f$, a constante réelle non nulle et f continue sur $\mathbb{R}$, alors la solution générale de (E) s'écrit comme somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée $(E_0) : y' = ay$, ainsi :

solution générale de $(E) :$ $y' = ay + f$	=	solution particulière de $(E) :$ $y' = ay + f$	+	solution générale de $(E_0) :$ $y' = ay$
--	---	---	---	--

A21 On se propose de démontrer la formule précédente.

Soit a une constante non nulle et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $(E) : y' = ay + f$ et $(E_0) : y' = ay$ l'équation homogène associée, y_0 est une solution particulière de (E) .

étape 1

On suppose que y est une solution de (E) , montrer que $y - y_0$ est une solution de (E_0) .

étape 2

On suppose que $y - y_0$ est une solution de (E_0) , montrer que y est une solution de (E) .

étape 3

Conclure.

A22 On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 6x + 5$.

- vérifier que $y_0 : x \mapsto 3x - 1$ est une solution particulière de (E)
- déterminer la solution générale de (E)

A23 $(E) : y' = -y + 2x + 3.$

Rechercher une fonction affine solution particulière de (E) ,
en déduire la solution générale de (E) puis la solution f de (E)
telle que $f(0) = 5$.

1	RésolEquaDiff(y'=-y+2x+3, (0,5))
☐	$\rightarrow y = 2x + 4e^{-x} + 1$

Remarques :

- on a systématiquement considéré des équations différentielles où l'inconnue y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$: il est possible, en adaptant les définitions et propriétés, de généraliser au cas où y est dérivable sur un intervalle I ,
- résoudre l'équation différentielle avec second membre $y' = f$ revient à rechercher les primitives de f sur $\mathbb{R}$ (ou sur I), cas particulier de $y' = ay + f$ avec $a = 0$.