ACTIVITES 09. Primitives et équations différentielles [Thiaude P.]

$\boxed{D}$ Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I :

F est **une primitive** de f sur $I \overset{déf}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F \text{ est derivable sur } I \\ F' = f \text{ sur } I \end{cases}$

☐ **A01** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x + 3$.
Donner une primitive au choix de f sur $\mathbb{R}$.

☐ **A02** Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x\ln(x) - x$.
Montrer que g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$\boxed{P}$ **quelques propriétés**

• (admis) une fonction est dérivable sur un intervalle, alors :
sa **dérivée** est **nulle sur cet l'intervalle** $\Leftrightarrow$ elle est constante sur cet intervalle

• une fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle et deux de ses primitives diffèrent d'une constante additive. Ainsi, si F_0 et F_1 sont deux primitives de f continue sur un intervalle I, alors il existe une constante réelle k telle que :
$\forall x \in I, F_1(x) = F_0(x) + k$.

☐ **A03** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - 3x^2$: trouver toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

☐ **A04** Déterminer la primitive de $f: x \mapsto x^2$ s'annulant en 2.

$\boxed{F}$ f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I, λ et a sont des constante réelles, n est un entier naturel alors :

• une **primitive de $\boldsymbol{f + g}$** est $\boldsymbol{F + G} + k$

• une **primitives de $\boldsymbol{f - g}$** est $\boldsymbol{F - G} + k$

• une **primitive de $\boldsymbol{\lambda \times f}$** est $\boldsymbol{\lambda \times F} + k$
où k est une constante.

$\boxed{F}$ **quelques formules**

• une **primitive de** $x \mapsto \boldsymbol{a}$ est $x \mapsto \boldsymbol{ax} + k$

• une **primitive de** $x \mapsto \boldsymbol{0}$ est $x \mapsto \boldsymbol{k}$

• une **primitive de** $x \mapsto \boldsymbol{x^n}$ est $x \mapsto \boldsymbol{\frac{1}{n+1}x^{n+1}} + k$

• une **primitive de** $x \mapsto \boldsymbol{x}$ est $x \mapsto \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2} + k$

où k est une constante.

☐ **A05** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 5x + 7$, déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$, en déduire celle prenant la valeur 2 en 1.

☐ **A06** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 5)^2$, déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$, en déduire celle prenant la valeur 7 en 0.

$\boxed{i}$ Au lieu de « une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2 + k$ », on dit parfois « une primitive sur $\mathbb{R}$ de $2x$ est $x^2 + k$ ».

$\boxed{F}$ Soit $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$:

• une **primitive de $\boldsymbol{x^n}$** est $\boldsymbol{\frac{1}{n+1}x^{n+1}} + k$ sur $]-\infty; 0[$ et $]0\,; +\infty[$

• une **primitive de** $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ est $\boldsymbol{2\sqrt{x}} + k$ sur $]0\,; +\infty[$

• une **primitive de $\boldsymbol{e^x}$** sur $\mathbb{R}$ est $\boldsymbol{e^x} + k$

• une **primitive de $\boldsymbol{e^{-x}}$** sur $\mathbb{R}$ est $-\boldsymbol{e^{-x}} + k$

• une **primitive de $\boldsymbol{\sin(x)}$** sur $\mathbb{R}$ est $-\boldsymbol{\cos(x)} + k$

• une primitive de $\boldsymbol{\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}$ est $\boldsymbol{\sin(x)} + k$

où k est une constante.

☐ **A07** Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f et g définies par :

$$f(x) = e^x - x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = 7\cos(x) + 5$$

$\boxed{F}$ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I :

• $n \in \mathbb{N}$

une **primitive de $u'u^n$** est $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$

(encore valable pour $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ et u ne s'annulant pas sur I)

• u ne s'annulant pas sur I

une **primitive de** $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u} + k$

où k est une constante

☐ **A08** Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f, g et h avec :

$$f(x) = 2x(x^2+5)^4 \quad g(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^3} \quad h(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

☐ **A09** Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f, g et h avec :

$$f(x) = 7x^2(x^3-1)^2 \quad g(x) = \frac{5x}{(x^2+7)^2} \quad h(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+2)^2}$$

$\boxed{F}$ • $a \neq 0$ et b constantes, une **primitive de e^{ax+b}** est $\frac{1}{a}e^{ax+b} + k$

• u dérivable sur un intervalle I, une **primitive de $u'e^u$** est $e^u + k$

☐ **A10** Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f, g et h avec :

$$f(x) = e^{-x} + 3 \quad g(x) = e^{4x-1} \quad h(x) = e^{-2x+1}$$

☐ **A11** Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f, g et h avec :

$$f(x) = xe^{x^2-1} \quad g(x) = 5xe^{-x^2+3} \quad h(x) = x^2e^{x^3+2}$$

☐ **A12** Pour tout réel x, $f(x) = xe^x$.
Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sachant que l'une d'entre elles s'écrit $x \mapsto (ax+b)e^x$ où a et b sont des constantes réelles.

$\boxed{F}$ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I :

• si $u > 0$ sur I, une **primitive de** $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ est $\sqrt{u} + k$

• une **primitives de $u'\cos(u)$** est $\sin(u) + k$

• une **primitive de $u'\sin(u)$** est $-\cos(u) + k$

où k est une constante

☐ **A13** Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f, g et h avec :

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \quad g(x) = 3\cos(2x+1) \quad h(x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{7}\right)$$

$\boxed{D}$ **Notion d'équation différentielle du premier ordre**

Une **équation différentielle** [du premier ordre] sur un intervalle I est une équation portant sur une fonction et sa dérivée première : la fonction inconnue est souvent notée y.
Lorsque $I = \mathbb{R}$, parfois on ne fait plus référence à I.

exemple

« $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = 5 \times y(x) + x^3$ » est une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ du premier ordre et qui s'écrit plus simplement : $y' = 5y + x^3$.

$\boxed{i}$ une équation différentielle du second ordre (hors programme) fait intervenir la dérivée seconde.

☐ **A14** On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = -2x + 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = e^{2x} + x$, $h(x) = g(x) + 1$.
La fonction g est-elle une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ?
Même question pour la fonction h.

$\boxed{F}$ u à valeurs strictement positives sur I :

une **primitive de** $\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$ est $\ln(\boldsymbol{u}) + k$

où k est une constante

☐ **A15** Déterminer les primitives sur $]2;+\infty[$ de f avec :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$$

Équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay}$, a constante

$\boxed{D}$ L'équation $\boldsymbol{y' = ay}$ qui s'écrit aussi $\boldsymbol{y' - ay = 0}$ est une **équation différentielle homogène** à coefficients constants.

$\boxed{F}$ Les solutions de $\boldsymbol{y' = ay}$ sont les fonctions $\boldsymbol{x \mapsto Ce^{ax}}$ où C est une constante.

$\boxed{i}$ Les solutions de $y' = ay$ sont définies à une constante multiplicative près et non à une constante additive.

☐ **A16 On se propose de démontrer la formule précédente**

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = ay$ où a est une constante.

1. Vérifier que : si C est une constante alors $f : x \mapsto Ce^{ax}$ est une solution de (E_0).

2. Soit f une solution de (E_0), pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$g(x) = e^{-ax} \times f(x)$$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0$.
Que peut-on en déduire pour g ?

3. Conclure

$\boxed{P}$ a et k sont des constantes, (E_0) : $y' = ay$.
Si y_1 et y_2 sont des solutions de (E_0), alors : $y_1 + y_2$ et $k \times y_1$ sont aussi des solutions de (E_0).

☐ **A17** Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$.

☐ **A18** Donner toutes les solutions de $y' = -y$ puis déterminer la solution f_0 vérifiant $f_0(1) = e^2$.

Équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay + b}$, a et b constantes, a non nulle

$\boxed{D}$ L'équation $\boldsymbol{y' = ay + b}$ qui s'écrit aussi $\boldsymbol{y' - ay = b}$ est une **équation différentielle** à coefficients constants **avec second membre constant**.

$\boxed{F}$ Les solutions de $\boldsymbol{y' = ay + b}$, a et b constante, a non nulle, sont les fonctions $\boldsymbol{x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}}$ où C est une constante.

☐ **A19** Démontrer la formule précédente.

☐ **A20** Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3$.

Équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay + f}$, a constante non nulle

$\boxed{D}$ L'équation $\boldsymbol{y' = ay + f}$ qui s'écrit aussi $\boldsymbol{y' - ay = f}$ où f est une fonction donnée continue sur I est une **équation différentielle** à coefficients constants **avec second membre non constant**.

$\boxed{F}$ la solution générale de $\boldsymbol{y' = ay + f}$, a constante non nulle et f continue sur I s'écrit comme somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée $y' = ay$:

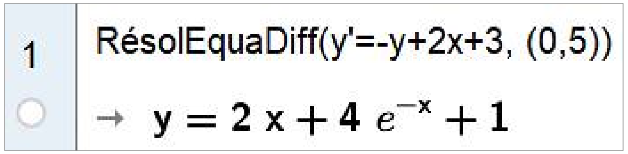
$$\underbrace{y}_{\substack{\text{la solution}\\ \textbf{générale}\\ \text{de } y'=ay+f}} = \underbrace{y_0}_{\substack{\text{une solution}\\ \textbf{particulière}\\ \text{de } y'=ay+f}} + \underbrace{g}_{\substack{\text{la solution}\\ \textbf{générale}\\ \text{de } y'=ay}}$$

☐ **A21** On se propose de démontrer la formule précédente.
a est une constantes, $a \neq 0$, I est un intervalle, f une fonction continue sur I, $(E) : y' = ay + f$, $(E_0) : y' = ay$, y_0 est une solution particulière de l'équation complète (E).

1. On suppose que : y est une solution de (E) sur I.
   Montrer que : $y - y_0$ est une solution de (E_0) sur I.
2. On suppose que : $y - y_0$ est une solution de (E_0) sur I.
   Montrer que y est une solution de (E) sur I.
3. Conclure.

☐ **A22** On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 6x + 5$.
• vérifier que $y_0 : x \mapsto 3x - 1$ est une solution particulière de (E)
• déterminer la solution générale de (E)

☐ **A23** On considère l'équation différentielle $y' = -y + 2x + 3$.
Rechercher une fonction affine solution particulière, en déduire toutes les solutions puis la solution f telle que $f(0) = 5$.



$\boxed{i}$ Sur un intervalle I donné, résoudre l'équation différentielle $y' = f$ avec f continue sur I revient à rechercher les primitives de f sur I.
Cela correspondrait à la situation $y' = ay + f$ avec $a = 0$.