ACTIVITES 08. Logarithme népérien

$\boxed{D}$ La fonction exponentielle $\exp : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in]0;+\infty[$
admet une fonction réciproque appelée logarithme népérien
$$\textbf{ln} : x \in]0;+\infty[\mapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$$
La fonction **ln** est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur son intervalle de définition $]0;+\infty[$. attention, **0 est valeur interdite**

$\boxed{F}$ ▶ $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0$, on a l'équivalence : $e^a = b \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} a = \ln(b)$

$\boxed{i}$ ▶ $\mathbf{ln}(\boldsymbol{A})$ **existe** $\Leftrightarrow \boldsymbol{A} > \mathbf{0}$, de même : $\mathbf{ln}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ **existe** $\Leftrightarrow \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$.

☐ **A01** Déterminer l'ensemble de définition de f, g et h :
$f(x) = \ln(-x+5)$ $g(x) = \ln(x) - 3$ $h(x) = (x-4)\ln(-x+1)$

☐ **A02** Déterminer l'ensemble de définition de f et g avec:
$f(x) = \ln(-x+5) - \ln(x+4)$ $g(x) = (x^2-9)\ln(x^2-7x-8)$

$\boxed{F}$ **principe de simplification**
▶ $\forall \boldsymbol{x} > \mathbf{0}, \boldsymbol{e}^{\mathbf{ln}(x)} = \boldsymbol{x}$ ▶ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{ln}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}$

☐ **A03** Simplifier : $A = e^{\ln(7)}$, $B = \ln(e^5)$, $C = \ln(\sqrt{e})$, $D = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$\boxed{F}$ **valeurs particulières importantes**
- $\mathbf{ln(1) = 0}$
- $\mathbf{ln}(\boldsymbol{e}) = \mathbf{1}$

☐ **A04** Justifier les deux valeurs particulières $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

☐ **A05** Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
1. $e^x = 1$ **2.** $e^x = -2$ **3.** $e^x = 3$ **4.** $e^x = 0$

☐ **A06** Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
1. $3e^x - 2 = 5$ **2.** $6 - e^{2x+1} = 1$

☐ **A07** Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :
1. $e^x > 2$ **2.** $e^{2x} < 13$ **3.** $e^x + 1 > 4$

☐ **A08** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 5e^x = 6$

$\boxed{M}$ **Pour résoudre une équation avec ln**
- on commence par déterminer le domaine d'existence $\mathcal{D}$ de l'équation
- on se ramène à la forme $\ln(a) = \ln(b)$ puis on utilise l'équivalence valable pour $a > 0$ et $b > 0$:
$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$
- parmi les nombres obtenus à la deuxième étape on ne garde que ceux appartenant au domaine d'existence $\mathcal{D}$

☐ **A09** Résoudre $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
1. $\ln(x) = 5$ **2.** $\ln(x) = 1$ **3.** $\ln(x) = -1$ **4.** $\ln(x) = 0$

☐ **A10** Résoudre l'équation : $\ln(2x-7) = \ln(x^2-6x+5)$

$\boxed{M}$ **Résoudre une inéquation avec ln**
- on commence par déterminer le domaine d'existence $\mathcal{D}$ de l'inéquation
- on se ramène à la forme $\ln(a) < \ln(b)$ ($\leqslant$, $>$, $\geqslant$) puis on utilise l'une des quatre équivalences valables pour $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$
$\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$ $\ln(a) \geqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \geqslant b$
- parmi les nombres obtenus à la deuxième étape on ne garde que ceux appartenant au domaine d'existence $\mathcal{D}$

☐ **A11** Résoudre l'inéquation : $\ln(x+1) \leqslant \ln(-x+4)$.

$\boxed{M}$ **Tableau de signes d'une expression $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ avec logarithme népérien** :
- on détermine le domaine d'existence $\mathcal{D}$ de l'expression $E(x)$
- on cherche pour quelles valeurs de x l'expression $E(x)$ est positive
- on place le(s) signe(s) « + » puis dans les autres cases un signe « − »

ne pas oublier de limiter ce tableau au domaine d'existence $\mathcal{D}$.

☐ **A12** Dresser le tableau de signes de $E(x) = \ln(x+1) - 2$.

$\boxed{F}$ ▶ $\forall \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ **et** $\forall \boldsymbol{y} > \mathbf{0}$: $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$.

☐ **A13** Démontrer la formule précédente en exprimant de deux manières différentes : $\ln\left(e^{\ln(x)+\ln(y)}\right)$.

☐ **A14** Soient x et y deux réels strictement positifs.

1. Démontrer que : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$, en déduire que $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

2. Démontrer que :

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$$

3. En déduire que : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

4. Démontrer oralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$.

$\boxed{F}$ ▶ Pour $\boldsymbol{x > 0, y > 0}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

• $\boldsymbol{\ln(x^2) = 2 \times \ln(x)}$ • $\boldsymbol{\ln(x^n) = n \times \ln(x)}$ • $\boldsymbol{\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \times \ln(x)}$

• $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)}$ • $\boldsymbol{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$

☐ **A15** • exprimer en fonction de $\ln(2)$: $A = \ln(8)$ et $B = \ln(16e)$.

• exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$: $C = \ln(10)$ $D = \ln(500)$

• exprimer en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$:

$$E = \ln(15e^2) \quad F = \ln\left(\frac{45}{e^4}\right)$$

☐ **A16** Résoudre chacune des équations :

1. $\ln(x) = \ln(4) + 2\ln(3)$ **2.** $\ln(x+2) + \ln(-x+1) = \ln(2)$

Formule $\ln'(x)$

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la restriction à cet intervalle de la fonction inverse :

$$\forall x > 0, \boldsymbol{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

On pourra retenir : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

☐ **A17** On souhaite démontrer les formules précédentes.
On pose $\forall x > 0, f(x) = e^{\ln(x)}$: en calculant de deux manières différents $f'(x)$, démontrer la formule précédente $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

☐ **A18** Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(x) + 1$.
Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, en déduire le tableau de variation de f (sans les limites).

☐ **A19** Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(x)$.
Calculer $f'(x)$, déterminer le tableau de variation de f (sans les limites).

$\boxed{P}$ La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\boxed{F}$ Si u est dérivable et à valeurs strictement positives sur un intervalle I, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$ autrement dit :

$$\forall x \in I, (\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

On pourra retenir : $\boldsymbol{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$.

☐ **A20** Soit f définie par $f(x) = \ln(-x+5)$. Déterminer $\mathcal{D}_f$, calculer $f'(x)$, déterminer le tableau de variation de f (sans les limites).

$\boxed{P}$ La fonction ln : $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0;+\infty[$.

☐ **A21** Démontrer la propriété précédente.

$\boxed{F}$ • $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty}$ • $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty}$

☐ **A22** Démontrons la propriété précédente.

1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Justifier que : $\forall x \in]0;+\infty[$, si $x > e^A$ alors $\ln(x) > A$
Conclure en terme de limite.

2. Déduire de **1.** que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

☐ **A23** Déterminer les limites suivantes :
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x)+2)$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} (2\ln(x)-3)$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} (4-\ln(x))$

$\boxed{F}$ **Formules des croissance comparée** 📖

- $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0}$ • $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0}$

☐ **A24** On cherche à démontrer les deux formules précédentes.

1. On rappelle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty \quad (*)$.
En posant $X = \ln(x)$, déduire de $(*)$ que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

2. Déduire de **1.** que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$.

$\boxed{F}$ **Formules des croissance comparée avec exposant $\boldsymbol{n}$ (admis)**

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n\ln(x) = 0, n \in \mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0, n\ n \in \mathbb{N}^*$

☐ **A25** Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \ln(x) - 3x$.

☐ **A26** **[d'après bac]** On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{-x+1}\right)$$

et pour $x \neq 1$, on pose : $u(x) = \dfrac{x+3}{-x+1}$.

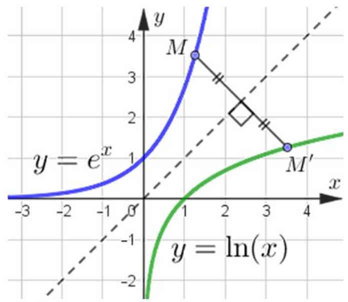
1. Étudier le signe de $u(x)$, en déduire que : $\mathcal{D} =]-3\,;1[$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Pour $x \in \mathcal{D}$ déterminer $u'(x)$, en déduire $f'(x)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}$, en déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$.

A27 **[d'après bac]** Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln(x) \text{ et } g(x) = x - 1 + \ln(x)$$

1. Calculer $g'(x)$, en étudier le signe, en déduire les variations de g.
2. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
3. Vérifier que, pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
En déduire les variations de f.

$\boxed{P}$ Dans un repère <u>orthonormé</u> la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ et celle de la fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice du repère d'équation $y = x$.



$\boxed{P}$ Lorsque u est à valeurs strictement positives sur un intervalle I, alors $f: x \in I \mapsto \ln(u(x))$ a le même sens de variation que u sur I.