ACTIVITES **04. Combinatoire et dénombrement**

$\boxed{D}$ **Quelques définitions**

• deux **ensembles sont égaux** $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ ils ont exactement les mêmes éléments

• l'**ensemble vide** est l'ensemble n'ayant aucun élément et on le note $\emptyset$
notons que : $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ et que : $E = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Card}(E) = 0$

• un **ensemble est fini** $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ il contient un nombre fini d'éléments

• le **cardinal** d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble

• si E est un ensemble fini on note parfois **Card**(E) le cardinale de E
exemples : $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0,\ \mathrm{Card}(\{4;7;12\}) = 3$

• l'**intersection** de deux ensemble E et F est l'ensemble noté $E \cap F$, formé des éléments qui sont simultanément dans E et dans F :

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \in F$$

• la **réunion** de deux ensemble E est F est l'ensemble noté $E \cup F$ formé des éléments qui sont dans au moins un des ensembles E et F :

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow x \in E \text{ ou } x \in F$$

(il s'agit d **« *ou* » mathématique**, appelé parfois « *ou* inclusif »)

• la **réunion** de plusieurs ensembles E_1, ..., E_n est l'ensemble noté

$$\bigcup_{i\in\{1;\dots;n\}} E_i$$

des éléments qui sont dans au moins un des ensembles E_1, ..., E_n :

$$x \in \bigcup_{i\in\{1;\dots;n\}} E_i \Leftrightarrow \text{il existe } i_0 \in \{1;\dots;n\} \text{ tel que } x \in E_{i_0}$$

(il s'agit d **« ou » mathématique**, appelé parfois « ou inclusif »)

• deux ensembles sont **disjoints** $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ les deux ensembles n'ont aucun élément en commun autrement dit lorsque leur intersection est vide :
E et F sont disjoints $\overset{déf}{\Leftrightarrow} E \cap F = \emptyset$.

$\boxed{P}$ **Principe additif**

• si deux ensemble sont disjoints alors le cardinal de la réunion est la somme des cardinaux :
si $\boldsymbol{E \cap F = \emptyset}$ alors $\mathbf{Card}(\boldsymbol{E \cup F}) = \mathbf{Card}(\boldsymbol{E}) + \mathbf{Card}(\boldsymbol{F})$

• si plusieurs ensembles sont deux à deux disjoints alors le cardinal de leur réunion est la somme des cardinaux :
si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles tels que $\boldsymbol{i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset}$,
alors $\mathbf{Card}(\boldsymbol{E_1 \cup \dots \cup E_n}) = \mathbf{Card}(\boldsymbol{E_1}) + \dots + \mathbf{Card}(\boldsymbol{E_n})$.

☐ **A01** On considère les ensembles $A = \{1;2;3\}$ et $B = \{2;4\}$.
Déterminer $\mathrm{Card}(A)$, $\mathrm{Card}(B)$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $\mathrm{Card}(A \cup B)$.
A-t-on $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$?

$\boxed{D}$ **quelques définitions** Soit E un ensemble non vide.

• un **couple de $\boldsymbol{E}$** est constitué de deux éléments de E **avec ordre** et avec **répétition autorisée**

<u>exemple</u>
$(\pi, 5)$ et $(5, \pi)$ sont deux couples distincts de $\mathbb{R}$
$(\sqrt{7}, \sqrt{7})$ est un couple de $\mathbb{R}$

• un **triplet de $\boldsymbol{E}$** est constitué de trois éléments de E **avec ordre** et avec **répétition autorisée**

<u>exemple</u>
$(1, \sqrt{2}, 5)$ et $(\sqrt{2}, 1{,}5)$ sont deux triplets distincts d'éléments de $\mathbb{R}$
$(3, -1{,}3)$ et $(-4, -4, -4)$ sont des triplets de $\mathbb{Z}$

• $k \in \mathbb{N}^*$, un ***k*-uplet de $\boldsymbol{E}$** est constitué de k éléments de E <u>**avec ordre**</u> et avec <u>**répétition autorisée**</u>

Remarque :
— les éléments d'un couple, d'un triplet et plus généralement d'un k-uplet sont séparés par une virgule ou un point-virgule
— un couple, un triplet et plus généralement un k-uplet s'écrit en à l'aide de parenthèse : $(\dots, \dots, \dots)$.

☐ **A02** Écrire tous les couples de $E = \{1; 2; 3\}$.

☐ **A03** Écrire tous les triplets de $F = \{1; 2\}$ puis les compter : retrouver ce dernier résultats à l'aide de la « méthode des cases ».

$\boxed{D}$ Soit E un ensemble fini : $\boldsymbol{E^k}$ est l'ensemble de tous les k-uplets de E.

Exemple

$E = \{a, b, c\}$

$E^2 = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)\}$

$\boxed{F}$ Soit E est un ensemble fini, alors on a :

$\mathrm{Card}(E^2) = \left(\mathrm{Card}(E)\right)^2$ $\qquad$ $\mathrm{Card}(E^3) = \left(\mathrm{Card}(E)\right)^3$

$k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{Card}\left(\boldsymbol{E^k}\right) = \left(\mathbf{Card}(\boldsymbol{E})\right)^{\boldsymbol{k}}$

$\boxed{D}$ On appelle **couple d'éléments de E et F** la donnée dans un ordre fixé d'un élément e de E et d'un élément f de F et il se note (e, f).
L'ensemble des tous les couples d'éléments de E et F est le **produit cartésien** de E et F et se note $E \times F$.

Exemple $\qquad E = \{1; 2\}, F = \{a; b; c\}$

$E \times F = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$

Remarquons que : $\mathbf{Card}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}) = \mathbf{Card}(\boldsymbol{E}) \times \mathbf{Card}(\boldsymbol{F})$.

$\boxed{P}$ **Principe multiplicatif**

$E_1, E_2, \dots, E_k$ sont des ensembles tous finis, alors :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \dots \times \mathrm{Card}(E_k)$$

En particulier, si E est fini alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{Card}\left(\boldsymbol{E^k}\right) = \left(\mathbf{Card}(\boldsymbol{E})\right)^{\boldsymbol{k}}$$

☐ **A04** $E = \{a; b; c; d\}$, combien y a-t-il de couples d'éléments de E ? Les écrire tous.

☐ **A05** Combien y a-t-il de 4-uplets d'un ensemble ayant 5 éléments ?

☐ **A06** $E = \{a; b; c; d\}$

1. Combien y a-t-il de 5-uplets de E ?
2. Combien y-a-il de 5-uplets de E commençant par b ?

$\boxed{D}$ **Factorielle d'un entier naturel**

On pose $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \underbrace{n \times (n-1) \times \dots \times 1}_{\text{produit des entiers de } n \text{ à } 1}$.

Le nombre $n!$ s'appelle **factorielle $\boldsymbol{n}$**.

☐ **A07** Calculer $3!$ et $5!$.

☐ **A08** Écrire en Python un programme qui demande d'entrer un entier naturel n puis affiche $n!$: la première version en utilisant la récursivité comprise par Python, la seconde sans utiliser la récursivité.

☐ **A09** On considère la proposition P_n : « $2^n \leqslant n!$ » où $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les cas particuliers $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant 4$, alors on a : $2^n \leqslant n!$.

$\boxed{D}$ **$\boldsymbol{k}$-arrangement**

Soit E un ensemble fini non vide et $k \in \mathbb{N}^*$, un **$\boldsymbol{k}$-arrangement** de E est un k-uplet d'éléments tous distincts de E, on parle aussi d'arrangement de k éléments de E.
Le nombre de k-arrangements d'un ensemble à n éléments $(n \neq 0)$ se note A_n^k.

☐ **A10** Écrire tous les 2-arrangements de $E = \{a; b; c; d\}$, en déduire A_4^2.

$\boxed{F}$ **Formule du nombre de $\boldsymbol{k}$-arrangements** 📖

Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble fini ayant n éléments et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \leqslant n$.
Le **nombre** de k-arrangements de E est :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

☐ **A11** Démontrer la formule précédente.

☐ **A12** Calculer A_{10}^3.

$\boxed{D}$ Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble fini ayant n éléments, une **permutation** de E est un **$\boldsymbol{n}$-arrangement** de E donc c'est un n-uplet d'éléments tous distincts de E (tous les éléments de E apparaissent exactement une fois).

$\boxed{F}$ $E \neq \emptyset, n = \mathrm{Card}(E)$: il y a $\boldsymbol{n}!$ **permutations** des éléments de E.

☐ **A13** Soit $E=\{0;1;2\}$.

1. À l'aide d'une formule donner le nombre de permutation de E.
2. Écrire toutes les permutations à l'aide d'un arbre de choix.

$\boxed{D}$ **quelques définitions**

• soient E et A deux ensembles :

A est **une partie de** $E \overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ tout élément de A est aussi élément de E
on écrit alors $A \subset E$

exemple
$\{a,c\}$ est une partie de $\{a;b;c;d\}$ donc $\{a,c\} \subset \{a;b;c;d\}$

• pour tout ensemble E : $\emptyset$ et E sont des parties de E

• $\emptyset$ s'appelle **partie vide**, une partie à un seul élément est un **singleton**

• l'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$

exemple
si $E=\{a,b\}$, alors : $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset;\{a\};\{b\};\{a,b\}\}$ donc $\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big)=4$
$\emptyset$ est la partie vide, $\{a\}$ et $\{b\}$ sont des singletons

$\boxed{P}$ **une propriété**
Un ensemble ayant n éléments possède 2^n parties : $\mathbf{Card}\big(\boldsymbol{\mathcal{P}(E)}\big)=\mathbf{2^n}$.

☐ **A14** Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :
« un ensemble ayant n éléments possède 2^n parties ».

$\boxed{D}$ Soit E ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$:
• une combinaison de E est une partie de E
• une **combinaison** de k éléments de E est une **partie à k éléments** de E

$\boxed{P}$ Un ensemble fini E ayant n éléments possède 2^n combinaisons.

☐ **A15** $E=\emptyset$, donner l'unique combinaison d'éléments de E.

$\boxed{D}$ Soit E un ensemble à n éléments : « ***k* parmi *n*** » est <u>le nombre</u> de combinaisons à k éléments de E et ce nombre se note $\binom{n}{k}$.

☐ **A16** Soit $E=\{a;b;c;d\}$.
Écrire toutes les combinaisons de 2 éléments de E, en déduire $\binom{4}{2}$.

☐ **A17** Soit $E=\{e_1;e_2;e_3;e_4;e_5\}$ un ensemble à 5 éléments :
— toute partie A de E est codée par le 5-uplet qui contient 1 à la place numéro i lorsque $e_i \in A$ et 0 sinon
— tout 5-uplet formé à partir de 0 et 1 est le codage d'une partie de E.
Ainsi, par exemple, la partie $\{e_1;e_3\}$ de E est codée par $(1,0,1,0,0)$.

1. Comment sont codées : la partie $\{e_2;e_4\}$, la partie $\emptyset$, E lui-même ?
2. Déterminer le nombre de 5-uplets formés à partir de 0 et 1, en déduire le nombre de parties de E.

📖 Le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments est 2^n.

☐ **A18** Justifier oralement la formule précédente en distinguant deux cas suivant que n est, ou non, nul.

$\boxed{D}$ Un **mot de longueur k sur l'alphabet $A=\{a;b\}$** est un k-uplet d'éléments de A.
exemples
• $(0,1,1,0,1)$ est un mot de longueur 5 sur l'aphabet $\{0;1\}$
• (a,a,b,a) est un mot de longueur 4 sur l'alphabet $\{a;b\}$.

$\boxed{F}$ **Formule de la somme des coefficients binomiaux** 📖

Pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

☐ **A19** On se propose de démontrer la formule précédente, pour ce faire on considère un ensemble à n éléments.

1. **Première méthode**
   Déterminer le nombre de parties de E à 0 éléments, à 1 éléments etc.., à n éléments puis conclure.

2. **Deuxième méthode**
   Faire une démonstration par récurrence.

$\boxed{F}$ quelques formules

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
- $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \quad (n \geqslant 2)$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n \quad (n \geqslant 1)$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

☐ **A20** Justifier ces formules.

$\boxed{F}$ 📖 Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

☐ **A21** Justifier la formule précédente.

$\boxed{F}$ Relation de Pascal 📖

n et k sont des entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

☐ **A22** Démontrer la formule du triangle de Pascal.

☐ **A23** Construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 5$.

☐ **A24** **Les poignées de mains**

1. Chacun des 5 participants à un premier diner serre la main à un autre participant. Combien de poignées de main sont échangées ?
2. Chacun des participants à un second diner serre la main à un autre participant : il y a 120 poignées de main échangées. Combien y a-t-il de participants ?

	éléments avec répétition possible	**éléments tous distincts**
avec ordre	Codé par : k-uplet répétition possible *calculs :* *les choix se multiplient*	Codé par : k-uplet sans répétion *calculs :* *les choix se multiplient ou* $A_n^k =$ cas particulier des permutations
sans ordre	(hors programme)	Successivement et Sans remise et Sans ordre ou simultanément : combinaison

☐ **A25** Marie possède 5 jeans et 7 T-shirts : elle part en vacances et décide d'emmener dans sa valise 2 jeans et 3 T-shirts. Montrer qu'elle a 350 façons différentes de faire sa valise.

☐ **A26** On tire cinq cartes d'un jeu de 32 cartes : on obtient alors une main de 5 cartes. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes contenant :

1. Le valet de trèfle ?
2. Exactement deux cœurs ?
3. Exactement un roi, une dame et deux valet ?
4. Au moins un roi ?

1. 31 465 **2.** 56 672 **3.** 1 920 **4.** 103 096

☐ **A27** • « TSAHM » est un mot anagramme du mot « MATHS » : ces deux mots sont composés exactement des mêmes lettres. Combien de mots anagrammes peut-on créer avec le mot « MATHS » (y compris lui-même) ?
• combien y a-t-il de mots 10 mots anagrammes du mot ANANA ?
Proposer deux méthodes. 120 et 10

☐ **A28** (d'après lelivrescolaire.fr) Dans une classe cinq élèves n'ont pas encore été évalués à l'oral.

1. Dans combien d'ordres différents le professeur peut-il les interroger, chaque élève n'étant interrogé qu'une et une seule fois ?
2. Combien y a-t-il de possibilités s'il n'a le temps d'interroger que trois d'entre eux ?

1. 120 **2.** 60