ACTIVITES 03. Limites de fonctions

$\boxed{D}$ • f est **définie au voisinage de $+\infty$** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle de la forme $]c;+\infty[$

• soit f définie au voisinage de $+\infty$, **f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$**
$\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ pour tout réel A, les nombres $f(x)$ sont plus grands que A pour tout x suffisamment grand et on écrit alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists m\in\mathbb{R} \text{ tel que : } \forall x\in\mathcal{D}_f,\ \text{si } x>m \text{ alors } f(x)>A$$

(notons que le nombre m dépend de A)

On définit de manière analogue : « f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ », « f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ » et enfin « f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ ».

• soit f définie au voisinage de $+\infty$ et ℓ un réel, **f a pour limite ℓ en $+\infty$**
$\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout x suffisamment grand, on écrit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$:

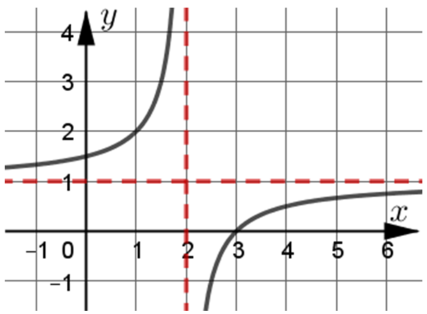
$$\forall \varepsilon>0,\exists m\in\mathbb{R} \text{ tel que : } \forall x\in\mathcal{D}_f,\ \text{si } x>m \text{ alors } |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

(notons que le nombre m dépend de ε)

On définit de manière analogue $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.

• la droite d'équation $y=\ell$ est une **asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$**
$\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
On définit de même **asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$**.

☐ **A01**
On donne la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
Déterminer par lecture graphique les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$, interpréter en terme d'asymptotes.



☐ **A02** Le plan est muni d'un repère orthogonal, f définie sur $\mathbb{R}$ admet pour tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Sens de variation de f	4 ↘	2 ↗	5 ↘	$-\infty$

• préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
• $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote verticale, horizontale ? Préciser.

☐ **A03** Le plan est muni d'un repère orthogonal, on précise que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$: interpréter en terme d'asymptotes.

☐ **A04** $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y=2$ pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et la droite d'équation $y=1$ au voisinage de $-\infty$.
En déduire deux limites.

☐ **A05** Rappel
« f admet pour limite ℓ en $+\infty$ »
$\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0,\exists m\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in\mathcal{D}_f$, si $x>m$ alors $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

Pour tout réel $x\neq 3$, on pose : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.
On admet que f admet pour limite 2 en $+\infty$.
• pour $\varepsilon=0{,}5$ donner une valeur possible de m
• pour $\varepsilon=0{,}1$ donne une valeur possible de m

$\boxed{D}$ Soit a un réel qui appartient à $\mathcal{D}_f$ ou qui est une borne finie de $\mathcal{D}_f$ et ℓ un réel : **f a pour limite ℓ en a** $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout x assez proche de a et on écrit alors $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\ell$:

$$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0 \text{ tel que : } \forall x\in\mathcal{D}_f,\ \text{si } |x-a|<\delta \text{ alors } |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

(notons que le nombre δ dépend de ε)
On définit la limite à gauche (à droite) en a en se limitant à des valeurs de x situées à gauche (à droite) de a, on écrit $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\ell$ ($\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\ell$).

$\boxed{P}$ • si f est définie en a et admet une limite en a alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$

• soit f définie sur un intervalle $]a-r; a+r[, r>0$, on a l'équivalence : f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $a \Leftrightarrow$ les limites à gauche et à droite de f en a existent toutes deux et sont égales à ℓ : $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \ell}$

$\boxed{D}$ Soit $a \in \mathbb{R}$ une borne de $\mathcal{D}_f$, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)} = \pm\infty$ ou $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)} = \pm\infty$

$\boxed{P}$ **Limite d'une fonction usuelle**

• soient P et Q deux polynômes alors : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)}$ et si $Q(a) \neq 0$:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}}$$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a}$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}}$ $(a \geqslant 0)$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|}$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)}$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)}$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)}$ $(a > 0)$

$\boxed{F}$ Limites de fonctions de référence en $-\infty$ et en $+\infty$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0}$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0}$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = 0}$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n} = \pm\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0}$

• $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x} = +\infty$

(ces limites se retrouvent en visualisant les courbes représentatives…)

☐ **A06** Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6$.

$\boxed{P}$ Les règles de calcul de la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient sont identiques à celles données pour les suites numériques. Lorsqu'un dénominateur tend vers 0 il est essentiel de savoir si cela se fait en restant positif (0^+) ou en restant négatif (0^-) : faire le **tableau de signe du dénominateur** est souvent d'une grande utilité.

☐ **A07** Pour $x \neq 7$, on pose :

$$f(x) = \frac{x-10}{x-7}$$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to7\\x<7}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to7\\x>7}} f(x)$.

☐ **A08** Pour tout réel x, on pose : $f(x) = e^{-2x+5}$.
Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\boxed{M}$ Afin éviter une forme indéterminée en $-\infty$ ou en $+\infty$ pour f fonction polynôme on peut mettre de force en facteur la plus grande puissance de x dans $f(x)$.

☐ **A09** Pour tout réel x, on pose :$f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.
Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Le **théorème de comparaison** et le **théorème des gendarmes** vues sur les suites se généralisent aux limites de fonctions en $-\infty$, en $a \in \mathbb{R}$ et en $+\infty$.

☐ **A10** Pour tout réel x, on pose : $f(x) = x^2 + 3\sin(x)$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

☐ **A11** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$\frac{1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x^2+1}$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

☐ **A12** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x+1} + 5\sin(x)$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

☐ **A13** On veut démontrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \ (*) \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \ (**)$$

Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^x - x - 1$:

• calculer $f'(x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$, en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ puis que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$

• à l'aide du théorème de comparaison, démontrer $(*)$, en déduire $(**)$

☐ **A14** On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthogonal de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. Étudier l'existence d'asymptote horizontale ou verticale.

☐ **A15** Calculer :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1}$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+5}$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+7}$ **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x-1}{x+4}}$

Formules des croissances comparées

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N})$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

☐ **A16** Pour tout $x \geqslant 0$, on pose :

$$g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$$

1. Calculer $g''(x)$, en étudier le signe sur $[0;+\infty[$, en déduire le sens de variation de g' sur $[0;+\infty[$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$, en déduire que g est croissante sur $[0;+\infty[$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur cet intervalle, en déduire que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$
3. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
4. **a.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, montrer que :

$$\forall x > 0, \frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

   b. Déduire de **3.** et **4.a.** que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

   c. Traiter directement le cas $n = 0$ et $n = 1$ puis conclure.

.

☐ **A17** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+5} - x$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

☐ **A18** Pour tout réel x non nul on pose :

$$f(x) = \frac{(x^{10}+10)^2 - 100}{x^{10}}$$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x)$.

☐ **A19** Calculer :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x-1)e^x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-1)e^x$

☐ **A20** Calculer :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+2x+7)e^x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2x+7)e^x$

☐ **A21** Calculer :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-x})$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^{0,1x})$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(5xe^{\frac{1}{2}x}\right)$

☐ **A22** Pour tout $x \neq 0$ on pose :

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Que peut-on en déduire en terme d'asymptotes ?
2. Dresser le tableau de signes de $e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$ puis déterminer les limites de f aux bornes finies de f.
   Que peut-on en déduire en terme d'asymptotes ?
3. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f.

☐ **A23** Pour tout réel x on pose :

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f.