M Rédaction d'une démonstration par récurrence

Pour tout entier naturel n on considère la **proposition** P_n : « … ».

- Initialisation [On vérifie que P_0 : « … » est vraie]
- Hérédité Soit k un entier naturel tel que :
  P_k : « … » est vraie (hypothèse de récurrence)
  Démontrons que P_{k+1} : « … » est vraie.
  … [calculs] … donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

☐ **A01** $u_0 = 2$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel : $u_n = 2^n + 1$.

☐ **A02** $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel : $u_n \geqslant n$.

☐ **A03** $v_1 = -1$ et pour tout n entier naturel non nul : $v_{n+1} = -3v_n + 8$.
Démontrer que pour tout n entier naturel non nul : $v_n = (-3)^n + 2$.

☐ **A04** On considère la proposition P_n : « $6^n + 1$ est un multiple de 5 ».
- montrer que P_n est héréditaire
- la proposition P_n est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

☐ **A05** $v_1 = 2$ et pour tout n entier naturel non nul : $v_{n+1} = 0{,}6v_n + 2$.
Démontrer que pour tout n entier naturel non nul : $v_n \leqslant 5$.

D • $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\boldsymbol{u_{n+1} \geqslant u_n}$
• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\boldsymbol{u_{n+1} \leqslant u_n}$

P Le **signe de** $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ permet d'obtenir le sens de variation de (u_n) :
- si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$, alors (u_n) est **croissante**,
- si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$, alors (u_n) est **décroissante**.

☐ **A06** $u_0 = 8$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = 0{,}25u_n + 3$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

P • si on ajoute/retranche le même nombre aux membres d'une inégalité alors on conserve le sens de la relation d'ordre
• si on multiplie ou divise par un nombre non nul les membres d'une inégalité alors :
— on conserve le sens de la relation d'ordre lorsque ce nombre est positif
— on inverse le sens de la relation d'ordre lorsque ce nombre est négatif

☐ **A07** $v_0 = 3$ et pour tout n entier naturel :

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{3} + 4$$

1. Calculer v_1.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

☐ **A08** Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite de premier terme u_0.

1. On suppose que $u_1 \geqslant u_0$. Déterminer le sens de variation de (u_n).
2. On suppose que $u_1 \leqslant u_0$. Déterminer le sens de variation de (u_n).

☐ **A09** Démontrer que la somme des carrés des entiers de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

F À connaître :

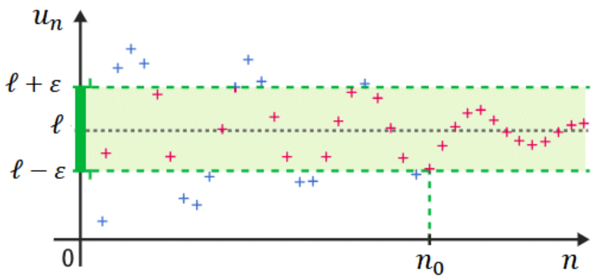
$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

D $\forall x \in \mathbb{R}$ la **valeur absolue** de x est le réel vérifiant : $|x| = \sqrt{x^2}$.

P Soit A un réel et ε un réel strictement positif.
- si $A \geqslant 0$ alors $|A| = A$ et si $A < 0$ alors $|A| = -A$
- A et B sont deux points d'un axe $(O; \vec{\imath})$ normé c'est-à-dire tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$, on note a l'affixe de A et b celle de B, alors : $AB = |a - b|$, ou encore : $AB = |b - a|$ et on écrit parfois : $d(a; b) = |a - b|$.
- pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'équivalence : $-\varepsilon < x < \varepsilon \Leftrightarrow |A| < \varepsilon$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

$\boxed{D}$ • la suite (u_n) **converge vers** un réel ℓ lorsque tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les nombres u_n à partir d'un certain rang.
On dit alors que la limite de la suite (u_n) est le réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on écrit parfois « $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ». Une suite est **convergente** s'il existe un <u>réel</u> ℓ vers lequel elle converge ; on admet l'unicité d'un tel réel ℓ.
Intuitivement : la suite (u_n) converge vers le réel ℓ lorsque tout intervalle centre en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :



La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geqslant n_0 \text{ alors } |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On peut aussi s'écrire $u_n \in \,]\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon[$ ou encore $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

• la suite (u_n) **diverge vers** $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les nombres u_n à partir d'un certain rang.
On dit qu'une telle suite **admet pour limite** $+\infty$, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou parfois $u_n \to +\infty$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_n > A$$

L'inégalité $u_n > A$ s'écrit aussi $u_n \in \,]A\,;\,+\infty[$.

Notons que $+\infty$ <u>n'est pas</u> un nombre réel , c'est juste un symbole.

• une suite (u_n) **diverge vers** $-\infty$ (ou tend vers $-\infty$) lorsque la suite de terme général $v_n = -u_n$ diverge vers $+\infty$, autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$$

Une suite est **divergente** lorsque qu'elle n'est pas convergente.

Une suite peut être divergente de différentes manières :
• elle admet une limite mais c'est $+\infty$ ou $-\infty$
• elle n'a pas de limite du tout

☐ **A10** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 7 + \dfrac{1}{n}$. En revenant à la définition démontrer que la suite (u_n) converge vers 7 puis écrire un programme Python qui demande d'entrer un réel $\varepsilon > 0$ puis affiche le plus petit entier naturel n_0 tel que : si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 7| < \varepsilon$.

▶**Règle : limite d'une somme** $\qquad \ell$ et ℓ' sont des réels

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

Remarque : la différence $A - B$ peut s'écrire comme somme : $A + (-B)$.

☐ **A11** Lorsque cela est possible, donner un sens à :
• « $5 + (+\infty)$ » • « $4 - (+\infty)$ » • « $(+\infty) + 9$ »
• « $(+\infty) - 129$ » • « $(+\infty) - (-\infty)$ » • « $(+\infty) - (+\infty)$ »
• « $(+\infty) + (+\infty)$ » • « $(-\infty) + (-\infty)$ » • « $0 - (-\infty)$ »

▶**Règle : limite d'un produit** $\qquad \ell$ et ℓ' sont des réels

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I.$

☐ **A12** Lorsque cela est possible, donner un sens à :
• « $(-2) \times (+\infty)$ » • « $(-\infty) \times (-3)$ » • « $(+\infty) \times 0$»
• « $(-\infty) \times (-\infty)$ » • « $(+\infty) \times (-\infty)$ »

$\boxed{F}$ • si $k > 0$ alors $kn^2, kn^3, k\sqrt{n}, ke^n$ divergent vers $+\infty$
• si $k < 0$ alors $kn^2, kn^3, k\sqrt{n}, ke^n$ divergent vers $-\infty$
• $\dfrac{k}{n}, \dfrac{k}{n^2}, \dfrac{k}{n^3}, \dfrac{k}{\sqrt{n}}, \dfrac{k}{e^n} = ke^{-n}$ convergent vers 0

☐ **A13** Déterminer la limite de (u_n) :

1. $u_n = -n + 80$ $\qquad$ **2.** $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{5}{n^2}$ $\qquad$ **3.** $u_n = n^2 + n^3$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

$\boxed{M}$ Pour lever une indétermination dans un polynôme en n on peut « mettre de force » en facteur la plus grande puissance de n.

☐ **A14** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 5n^2 - 3n + 2$, $v_n = -3n^2 + 8n + 1$ et $w_n = n^3 - n^2 + 4n - 3$. Déterminer les limites de (u_n), (v_n) et (w_n).

▶Règle : limite d'un quotient ℓ et ℓ' sont des réels

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ ou 0^-	0	$0^+, 0^-$ $\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$F.I.$	$\pm\infty$	$F.I.$

☐ **A15** Si possible, donner un sens à :

- « $\dfrac{5}{+\infty}$ » • « $\dfrac{-7}{-\infty}$ » • « $\dfrac{-3}{0^+}$ » • « $\dfrac{7}{0^-}$ » • « $\dfrac{-2}{0^-}$ »
- « $\dfrac{+\infty}{-\infty}$ » • « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » • « $\dfrac{0^+}{0^-}$ » • « $\dfrac{+\infty}{0^-}$ » • « $\dfrac{+\infty}{0^+}$ »

☐ **A16** Déterminer les limites de (u_n) et (v_n) :

$$u_n = \frac{5n-1}{3n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{7n+1}{n^2+1}$$

Retenons qu'il Il y a quatre type de formes indéterminées :

- « $\infty - \infty$ » • « $0 \times \infty$ » • « $\dfrac{0}{0}$ » • « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Attention, ne inégalité stricte entre u_n et v_n donnera, lorsqu'elles existent, une inégalité **large** sur les limites de u_n et v_n.

▶Théorème de comparaison 📖

- si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple de rédaction

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$

donc d'après le théorème de comparaison on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

☐ **A17** Démontrer le premier point du théorème de comparaison.

☐ **A18** Pour tout n entier naturel, on pose : $u_n = 3n^2 + (-1)^n$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

☐ **A19** Pour tout n entier naturel, on pose : $w_n = -n^2 + 5\cos(2n-1)$.
Déterminer la limite de la suite (w_n).

▶Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites telles que :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

et

- les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ

alors la suite (v_n) converge elle aussi vers ℓ.

Exemple de rédaction

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

☐ **A20** Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin(n)+2}{n}$$

☐ **A21** Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) de terme général :

1. $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{n+2}$ **2.** $u_n = n^2 + (-1)^n$

$\boxed{D}$ • (u_n) est **majorée** par la constante M lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leqslant M$, on dit alors que le nombre M est un **majorant** de la suite

• (u_n) est **minorée** par la constante m lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leqslant m$, on dit alors que le nombre m est un **minorant** de la suite

• la suite (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

☐ **A22** **Oral** **Démontrer qu'une suite croissante est minorée.**

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

☐ **A23** Démontrer que la suite (u_n) est bornée : $u_n = 3 + \sin(n)$.

▶Théorème de convergence monotone
• si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
• si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

☐ **A24 (d'après BAC)**

$u_0 = 2$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$

1. Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 9.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$, en déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Justifier que la suite (u_n) converge.

Théorème 📖
• Si une suite est **croissante** et **non majorée**, alors elle **diverge** vers $+\infty$.
• Si une suite est **décroissante** et **non minorée**, alors elle **diverge** vers $-\infty$.

☐ **A25** Démontrer le théorème précédent.

Inégalité de Bernoulli 📖
Soit a un réel strictement positif, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

☐ **A26** Démontrer l'inégalité de Bernoulli.

▶Règle : limite de q^n 📖 $q \in \mathbb{R}$

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

☐ **A27** Démontrer la règle de la limite de q^n en étudiant successivement les cas suivants : $q = 1$, $q > 1$, $0 < q < 1$, $q = 0$, $-1 < q < 0$ et $q \leqslant -1$.

☐ **A28** Étudier l'existence d'une limite, la déterminer lorsqu'elle existe :

1. $u_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$ **2.** $u_n = \left(\frac{7}{6}\right)^n$ **3.** $u_n = (\pi - 4)^n$

☐ **A29** Étudier l'existence d'une limite, la déterminer lorsqu'elle existe :

1. $u_n = 5^n + 7^n$ **2.** $u_n = 12^n - 7^n$

☐ **A30** Étudier l'existence d'une limite, la déterminer lorsqu'elle existe :

1. $u_n = \dfrac{2^n - 5^n}{3^n + 4^n}$ **2.** $u_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{2^n + 1}$

☐ **A31** (d'après BAC)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.