ACTIVITES 01. Suite numérique **Thiaude P.**

▶ [M] **Rédaction d'une démonstration par récurrence**

Pour tout entier naturel n on considère la **proposition** P_n : « … ».

- initialisation
  On vérifie que P_0 : « … » est vraie
- hérédité
  Soit k un entier naturel tel que : P_k : « … » est vraie (H.R.)
  Démontrons que P_{k+1} : « … » est vraie… (calculs) … P_{k+1} est vraie.

Conclusion
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

☐ **A01** $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel : $u_n = 2^n + 1$.

☐ **A02** $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.
Démontrer par récurrence que pour entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n$.

☐ **A03** $v_1 = -1$ et pour tout n entier naturel non nul : $v_{n+1} = -3v_n + 8$.
Démontrer que pour tout n entier naturel non nul : $v_n = (-3)^n + 2$.

☐ **A04** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère P_n : « $6^n + 1$ est un multiple de 5 »
Montrer que P_n est héréditaire, est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

[D] **Sens de variation d'une suite**

La suite (u_n) est :

- **croissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\boldsymbol{u_n \leqslant u_{n+1}}$
- **croissante à partir du rang $\boldsymbol{n_0}$** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ on a : $\boldsymbol{u_n \leqslant u_{n+1}}$
- **décroissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\boldsymbol{u_n \geqslant u_{n+1}}$
- **décroissante à partir du rang $\boldsymbol{n_0}$** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ on a : $\boldsymbol{u_n \geqslant u_{n+1}}$

[P] Le **signe de $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$** permet d'obtenir le sens de variation de (u_n) :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$, alors (u_n) est **croissante**,
- si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$, alors (u_n) est **décroissante**.

☐ **A05** $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}25u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2, conjecturer le sens de variation de (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

▶ [P] **inégalités et opérations élémentaires**

- si on ajoute/retranche un même nombre à chaque membre d'une inégalité alors on conserve le sens de la relation d'ordre
- si on multiplie/divise par un nombre non nul chaque membre d'une inégalité alors :
  – on conserve le sens de la relation d'ordre lorsque ce nombre est positif
  – on inverse le sens de la relation d'ordre lorsque ce nombre est négatif

☐ **A06** $v_0 = 3$ et pour tout n entier naturel :

$$v_{n+1} = \frac{v_n + 12}{3}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $v_n \leqslant v_{n+1}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

☐ **A07** Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite de premier terme u_0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose que $u_1 \geqslant u_0$: étudier le sens de variation de (u_n).
2. On suppose que $u_1 \leqslant u_0$: étudier le sens de variation de (u_n).

[F] À connaître :

$$\boldsymbol{1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

[D] $\forall x \in \mathbb{R}$ la **valeur absolue** de x est le réel $|x|$ vérifiant : $|x| = \sqrt{x^2}$.

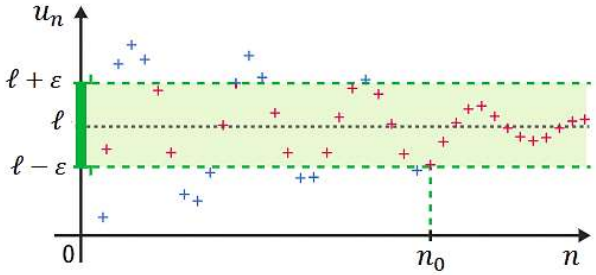
[P] Soit x un réel et ε un réel strictement positif.

- pour tout réel x on a : $|x| \geqslant 0$
- si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$ et si $x < 0$ alors $|x| = -x$
- A et B sont deux points d'un axe $(O; \vec{\imath})$ normé c'est-à-dire tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$, on note a l'affixe de A et b celle de B, alors : $AB = |a - b|$, ou encore : $AB = |b - a|$ et on écrit parfois : $d(a; b) = |a - b|$.
- pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'équivalence : $-\varepsilon < x < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D Notion de limite d'une suite

- (u_n) **converge vers** $\ell \in \mathbb{R} \overset{déf}{\iff}$ tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les nombres u_n à partir d'un certain rang, on dit alors que la limite de la suite (u_n) est le réel ℓ et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ **ou** « $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ »
- (u_n) est **convergente** $\overset{déf}{\iff}$ il existe un réel ℓ vers lequel elle converge (on admet l'unicité d'un tel réel ℓ)



▶ (u_n) **converge vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geqslant n_0 \text{ alors } |u_n - \ell| < \varepsilon$$

(on peut aussi s'écrire $u_n \in]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[$ ou $\ell-\varepsilon < u_n < \ell+\varepsilon$)

- (u_n) **diverge vers** $+\infty \overset{déf}{\iff}$ tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les nombres u_n à partir d'un certain rang
  On dit alors que (u_n) **admet pour limite** $+\infty$, on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$

▶ (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_n > A$$

(l'inégalité $u_n > A$ s'écrit aussi $u_n \in]A\,;+\infty[$)

- (u_n) **diverge vers** $-\infty$ lorsque la suite $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \overset{déf}{\iff} \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$$

- une suite est **divergente** lorsque qu'elle n'est pas convergente

(une suite peut être divergente de différentes manières : elle admet une limite mais c'est $+\infty$ ou $-\infty$, ou bien elle n'a pas de limite du tout)

☐ **A08** En revenant à la définition démontrer que la suite (u_n) converge vers 7 : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 7 + \frac{1}{n}$.

▶**Règle : limite d'une somme** ℓ et ℓ' sont des réels

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Remarque : la différence $A - B$ peut s'écrire comme somme : $A + (-B)$.

☐ **A09** Lorsque cela est possible, donner un sens à :

- « $5 + (+\infty)$ »
- « $4 - (+\infty)$ »
- « $(+\infty) + 9$ »
- « $(+\infty) - 129$ »
- « $(+\infty) - (-\infty)$ »
- « $(+\infty) - (+\infty)$ »
- « $(+\infty) + (+\infty)$ »
- « $(-\infty) + (-\infty)$ »
- « $0 - (-\infty)$ »

▶**Règle : limite d'un produit** ℓ et ℓ' sont des réels

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**F.I.**

☐ **A10** Lorsque cela est possible, donner un sens à :

- « $(-2) \times (+\infty)$ »
- « $(-\infty) \times (-3)$ »
- « $(+\infty) \times 0$»
- « $(-\infty) \times (-\infty)$ »
- « $(+\infty) \times (-\infty)$ »

F Limites de référence

Soit k une constante réelle.

- si $k > 0$ alors : kn, kn^2, kn^3, $k\sqrt{n}$, ke^n **divergent vers** $+\infty$
- si $k < 0$ alors : kn, kn^2, kn^3, $k\sqrt{n}$, ke^n **divergent vers** $-\infty$
- quel que soit k :
  $\frac{k}{n}$, $\frac{k}{n^2}$, $\frac{k}{n^3}$, $\frac{k}{\sqrt{n}}$, $\frac{k}{e^n}$ **convergent vers 0**

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

☐ **A11** Déterminer la limite de (u_n) :

1. $u_n = -n + 80$ **2.** $u_n = \sqrt{n} + \frac{5}{n^2}$ **3.** $u_n = n^2 + n^3$

M Pour lever une indétermination dans un polynôme en n on peut « mettre de force » en facteur la plus grande puissance de n.

☐ **A12** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 5n^2 - 3n + 2, v_n = -3n^2 + 8n + 1$.
Déterminer les limites de : (u_n) et (v_n).

▶**Règle : limite d'un quotient** ℓ et ℓ' sont des réels

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^+ ou\ 0^-$	0	$0^+ ou\ 0^-$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$F.I.$	$\pm\infty$	$F.I.$

☐ **A13** Si possible, donner un sens à :

- « $\frac{5}{+\infty}$ »
- « $\frac{-7}{-\infty}$ »
- « $\frac{-3}{0^+}$ »
- « $\frac{7}{0^-}$ »
- « $\frac{-2}{0^-}$ »
- « $\frac{+\infty}{-\infty}$ »
- « $\frac{+\infty}{+\infty}$ »
- « $\frac{0^+}{0^-}$ »
- « $\frac{+\infty}{0^-}$ »
- « $\frac{+\infty}{0^+}$ »

☐ **A14** Déterminer la limite de (u_n) avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5n-1}{3n+1}$$

Retenons qu'il Il y a **quatre** type de **formes indéterminées** :

- « $\infty - \infty$ »
- « $0 \times \infty$ »
- « $\frac{0}{0}$ »
- « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Attention, une inégalité stricte entre u_n et v_n donnera une inégalité **large** sur les limites de u_n et v_n.

▶**Théorème de comparaison**

- si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

exemple de rédaction

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ donc d'après le théorème de comparaison on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

☐ **A15** Démontrer le premier point du théorème de comparaison.

☐ **A16** Pour tout n entier naturel, on pose : $u_n = 3n^2 + (-1)^n$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

☐ **A17** Pour tout n entier naturel, on pose : $w_n = -n^2 + 5\cos(2n-1)$.
Déterminer la limite de la suite (w_n).

▶**Théorème des gendarmes**

Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont des suites telles que :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
- les suites (u_n) **et** (w_n) **sont convergentes** et ont **même limite** ℓ

alors la suite (v_n) **est convergente** et **sa limite est** ℓ.

exemple de rédaction

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$
donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

☐ **A18** Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin(n)+2}{n}$$

☐ **A19** Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) de terme général :

1. $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{n+2}$ **2.** $u_n = n^2 + (-1)^n$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D suite majorée, minorée, bornée

- (u_n) est **majorée** par la constante $M \overset{déf}{\iff}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leqslant M$
  on dit alors que le nombre M est un **majorant** de la suite (u_n)
- (u_n) est **minorée** par la constante $m \overset{déf}{\iff}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ on a : $m \leqslant u_n$,
  on dit alors que le nombre m est un **minorant** de la suite (u_n)
- la suite (u_n) est **bornée** $\overset{déf}{\iff}$ elle est à la fois majorée et minorée.

☐ **A20** **Oral** Démontrer qu'une suite croissante est minorée.

☐ **A21** Démontrer que la suite (u_n) est bornée : $u_n = 3 + \sin(n)$.

▶Théorème de convergence monotone

- si une suite est **croissante** et **majorée**, alors elle est **convergente**
- si une suite est **décroissante** et **minorée**, alors elle est **convergente**

☐ **A22** **Soit (u_n) la suite définie par** $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$$

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 9$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de (u_n), justifier que $\ell = \frac{2}{3}\ell + 3$, en déduire ℓ.

Théorème

- si une suite est **croissante** et **non majorée**, alors elle **diverge** vers $+\infty$
- si une suite est **décroissante** et **non minorée**, alors elle **diverge** vers $-\infty$

☐ **A23** **Oral** Justifier à l'oral le premier point du théorème précédent.

Inégalité de Bernoulli

Soit a un réel tel que $a > -1$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + na$.

☐ **A24** Démontrer par récurrence sur n l'inégalité de Bernoulli.

▶Règle : limite de q^n

Soit $q \in \mathbb{R}$ une constante, on s'intéresse à la limite éventuelle de q^n :

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

exemple de rédaction

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}8)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$.

- on a : $-1 < -0{,}8 < 1$, or si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ (cours),
  donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}8)^n = 0$
- on a : $2 > 1$, or si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ (cours),
  donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

☐ **A25** Démontrer la règle de la limite de q^n en étudiant successivement les cas suivants : $q = 1$, $q > 1$, $0 < q < 1$, $q = 0$, $-1 < q < 0$ et $q \leqslant -1$.

☐ **A26** Étudier l'existence d'une limite, la déterminer lorsqu'elle existe :

1. $u_n = \left(\frac{7}{6}\right)^n$ **2.** $u_n = (-1)^n$ **3.** $u_n = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$

☐ **A27** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 12^n - 7^n$.
Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

☐ **A28** Étudier l'existence d'une limite, la déterminer lorsqu'elle existe :

1. $u_n = \dfrac{2^n - 5^n}{3^n + 4^n}$ **2.** $u_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{2^n + 1}$

☐ **A29** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$$
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.