

Exercice 1

On pose :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}$$

- Déterminer \mathcal{D}_f .
- Calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variation de f .

Corrigé

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}$$

1. \mathcal{D}_f

L'expression $f(x)$ existe lorsque son dénominateur $x^2 + 1$ est non nul ; résolvons :

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ (impossible)}$$

Le dénominateur de $f(x)$ ne s'annule jamais donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. $f'(x)$

La fonction f , quotient de deux fonctions polynômes donc dérivables sur \mathbb{R} , est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition, donc sur \mathbb{R} .

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x + 4)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 4x + 4)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x + 4x^2 + 4 - 2x^3 - 8x^2 - 8x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

3. Signe de $f'(x)$ et sens de variation de f

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $-4x^2 - 6x + 4$, qui est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec

$a = -4$, $b = -6$ et $c = 4$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(-4)(4) = 36 + 64 = 100$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+6 - \sqrt{100}}{2(-4)} = \frac{6 - 10}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+6 + \sqrt{100}}{2(-4)} = \frac{6 + 10}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$$

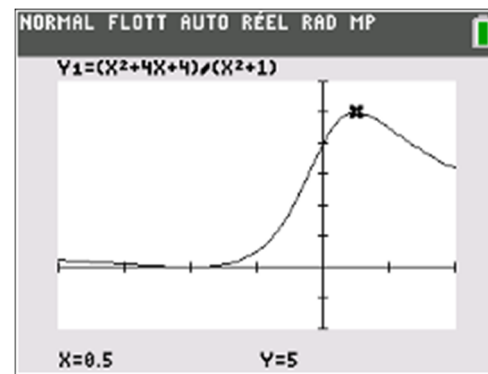
Règle : $ax^2 + bx + c$ est signe de a à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre ses racines.

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	\emptyset	$+$	$-$
Sens de variation de f	↘ 0		↗ 5	

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 + 4(-2) + 4}{(-2)^2 + 1} = \frac{4 - 8 + 4}{4 + 1} = \frac{0}{5} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{4} + 2 + 4}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{1}{4} + 6}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{25}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{25}{5} = 5$$



Exercice 2

On pose :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$$

- Déterminer \mathcal{D}_f .
- Calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variation de f .

Corrigé

1. \mathcal{D}_f

$f(x)$ existe lorsque le dénominateur $x^2 - 3$ est non nul ;
résolvons :

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

$f(x)$ existe lorsque $x \neq \sqrt{3}$ et $x \neq -\sqrt{3}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

2. $f'(x)$

La fonction f , quotient de deux fonctions polynômes donc dérivables sur \mathbb{R} ,
est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition c'est-à-dire
sur : $] -\infty ; -\sqrt{3}[$, sur $] -\sqrt{3} ; \sqrt{3} [$ et sur $] \sqrt{3} ; +\infty [$.

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(x^2-3) - 2x(x+2)}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-3-2x^2-4x}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-4x-3}{(x^2-3)^2}$$

3. Signe de $f'(x)$ et sens de variation de f

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son
numérateur : $-x^2 - 4x - 3$, qui est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$,
 $b = -4$ et $c = -3$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 - \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{4-2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 + \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{4+2}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

Règle : $ax^2 + bx + c$ est signe de a à l'extérieur de ses racines et du signe
contraire entre ses racines.

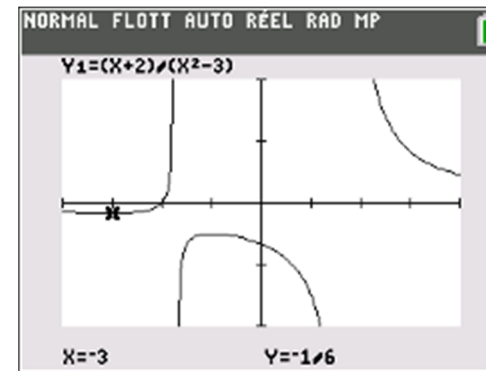
On obtient le tableau de variation :

🔴* Attention à ne pas oublier les valeurs interdites !

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	\emptyset	+	+	\emptyset	-
Sens de variation de f	↘		↗		↘	
		$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$		

$$f(-3) = \frac{(-3)+2}{(-3)^2-3} = \frac{-3+2}{9-3} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)+2}{(-1)^2-3} = \frac{-1+2}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$



Exercice 3

Pour tout réel x , on pose : $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 7x - \frac{1}{9}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f .

Corrigé

1. La fonction f est une fonction polynôme donc est dérivable sur \mathbb{R} .

$$f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 7x - \frac{1}{9}$$

On obtient directement :

$$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 12 \times 2x + 7$$

$$f'(x) = 9x^2 - 24x + 7$$

4. $9x^2 - 24x + 7$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 9$, $b = -24$ et $c = 7$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(9)(7) = 576 - 252 = 324$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+24 - \sqrt{324}}{2(9)} = \frac{24 - 18}{18} = \frac{6}{18} = \frac{6 \times 1}{6 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+24 + \sqrt{324}}{2(9)} = \frac{24 + 18}{18} = \frac{42}{18} = \frac{6 \times 7}{6 \times 3} = \frac{7}{3}$$

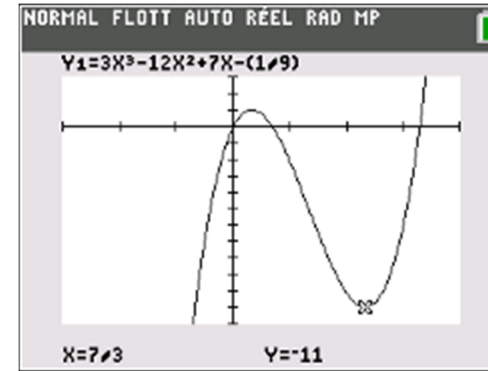
Règle : $ax^2 + bx + c$ est signe de a à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre ses racines.

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	\emptyset	-	\emptyset	+
Sens de variation de f		↗ 1	↘ -11	↗	

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 12\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{9} = 1$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = 3\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 12\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{7}{3}\right) - \frac{1}{9} = -11$$



Exercice 4

Pour tout réel x , on pose : $f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

- Déterminer les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f et de l'axe des abscisses.
- Calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variation de f .

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$$

1. Intersection entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$ qui s'écrit aussi : $(x^2 - 4)^2 - 1 = 0$.

On a :

$$(x^2 - 4)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4 + 1)(x^2 - 4 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - (\sqrt{3})^2)(x^2 - (\sqrt{5})^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{5} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}$$

\mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en quatre points d'abscisses respectives :

$$-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3} \text{ et } \sqrt{5}.$$

2. $f'(x)$ et tableau de variation de f

f est une fonction polynôme donc est dérivable sur \mathbb{R} .

$$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$$

On développe d'abord $f(x)$:

$$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$$

$$f(x) = (x^2)^2 - 2(x^2)(4) + (4)^2 - 1$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 - 1$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$$

On calcule ensuite $f'(x)$ à partir de la forme développée de $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 8 \times 2x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 4x(x^2 - 4)$$

$$f'(x) = 4x(x^2 - 2^2)$$

$$f'(x) = 4x(x + 2)(x - 2)$$

$$\bullet 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{4} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\bullet x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\bullet x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

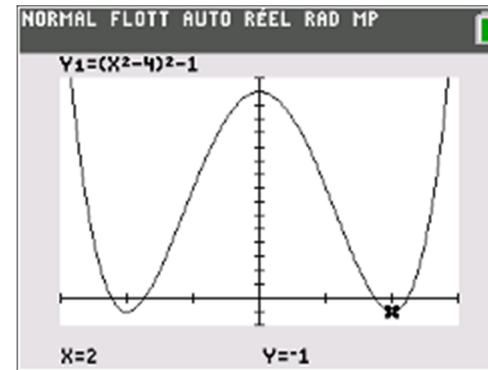
Règle : $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Signe de x	-	-	0	+	+
Signe de $x + 2$	-	0	+	+	+
Signe de $x - 2$	-	-	-	0	+
Signe de $f'(x)$	-	0	+	0	+
Sens de variation de f					

$$f(-2) = ((-2)^2 - 4)^2 - 1 = (4 - 4)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(0) = ((0)^2 - 4)^2 - 1 = (0 - 4)^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$f(2) = ((2)^2 - 4)^2 - 1 = (4 - 4)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$$



Compléments

• autre méthode de calcul de $f'(x)$

$$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$$

Rappel : $(u^2)' = 2u \times u'$

$$u(x) = x^2 - 4 \quad u'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 2(x^2 - 4) \times 2x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x + 2)(x - 2).$$

• On peut montrer que f est une fonction paire, donc sa représentation graphique dans un repère orthogonal admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, ce que l'on observe bien sur l'écran de la calculatrice.