

1^E exercices corrigés : fonction exponentielle Thiaude P.

EXP 01 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x-1} \times e^{-x+6} = 1$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a les équivalences :

$$e^{2x-1} \times e^{-x+6} = 1 \Leftrightarrow e^{(2x-1)+(-x+6)} = 1 \Leftrightarrow e^{2x-1-x+6} = e^0 \\ \Leftrightarrow e^{x+5} = e^0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$$

L'équation de départ admet pour unique solution : -5 .

1	exp(2x-1)*exp(-x+6)=1
☐	Résoudre: $\{x = -5\}$

EXP 02 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} \times e^{-x+7} = e$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a les équivalences :

$$e^{2x} \times e^{-x+7} = e \Leftrightarrow e^{2x+(-x+7)} = e \Leftrightarrow e^{2x-x+7} = e \\ \Leftrightarrow e^{x+7} = e^1 \Leftrightarrow x+7=1 \Leftrightarrow x=1-7 \Leftrightarrow x=-6$$

L'équation de départ admet pour unique solution : -6 .

1	exp(2x)*exp(-x+7)=exp(1)
☐	Résoudre: $\{x = -6\}$

EXP 03 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{x-4}} = \frac{1}{e}$$

Méthode 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{x-4}} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{3x+1-(x-4)} = e^{-1} \Leftrightarrow e^{2x+5} = e^{-1} \Leftrightarrow 2x+5=-1 \\ \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow x=-3$$

L'équation de départ admet pour unique solution : -3 .

Méthode 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{x-4}} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{3x+1} \times e = 1 \times e^{x-4} \Leftrightarrow e^{3x+1} \times e^1 = e^{x-4} \\ \Leftrightarrow e^{3x+1+1} = e^{x-4} \Leftrightarrow e^{3x+2} = e^{x-4} \Leftrightarrow x-4=3x+2 \\ \Leftrightarrow -4-2=3x-x \Leftrightarrow -6=2x \Leftrightarrow -3=x \Leftrightarrow x=-3$$

L'équation de départ admet pour unique solution : -3 .

1	exp(3x+1)/exp(x-4)=exp(-1)
☐	Résoudre: $\{x = -3\}$

EXP 04 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x(e^x + 8) = 9$.

L'équation $e^x(e^x + 8) = 9$ s'écrit aussi : $(e^x)^2 + 8e^x - 9 = 0$.
En posant $X = e^x$, elle devient : $X^2 + 8X - 9 = 0$.

$X^2 + 8X - 9$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = 8$ et $c = -9$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(1)(-9) = 64 + 36 = 100$$

$\Delta > 0$ donc $X^2 + 8X - 9$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2(1)} = \frac{-8 - 10}{2} = \frac{-18}{2} = -9 \\ X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2(1)} = \frac{-8 + 10}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

On a donc : $X = -9$ ou $X = 1$

$$\left. \begin{array}{l} e^x = -9 \\ (impossible) \end{array} \right| \begin{array}{l} e^x = 1 \\ \Leftrightarrow e^x = e^0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \end{array}$$

L'équation de départ admet pour unique solution : 0 .

EXP 05 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - 13e^{-x} + 12 = 0$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} e^x - 13e^{-x} + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x \times (e^x - 13e^{-x} + 12) &= e^x \times 0 \quad (e^x \neq 0) \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 - 13e^x e^{-x} + 12e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 + 12e^x - 13 &= 0 \end{aligned}$$

En posant $X = e^x$, l'équation devient : $X^2 + 12X - 13 = 0$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} X^2 + 12X - 13 &= 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X + 13) = 0 \quad (*) \\ \Leftrightarrow X - 1 &= 0 \text{ ou } X + 13 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -13 \end{aligned}$$

(*) est une racine évidente de $X^2 + 12X - 13$, cela en facilite considérablement la factorisation ...

On peut aussi utiliser la méthode du discriminant Δ pour obtenir les racines 1 et (-13).

$X = 1 \text{ ou } X = -13$	
$e^x = 1$	$e^x = -13$
$\Leftrightarrow e^x = e^0$	(impossible)
$\Leftrightarrow x = 0$	

L'équation de départ admet pour unique solution : 0.

EXP 06 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y = e + 1 \\ x - ye^{-1} = 0 \end{cases}$$

Par différence on obtient :

$$\begin{aligned} x + y - (x - ye^{-1}) &= e + 1 - 0 \\ \Leftrightarrow x + y - x + ye^{-1} &= e + 1 \\ \Leftrightarrow 1y + e^{-1}y &= e + 1 \\ \Leftrightarrow y(1 + e^{-1}) &= e + 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e + 1}{1 + e^{-1}}$$

Or, on a :

$$\frac{e + 1}{1 + e^{-1}} = \frac{e + 1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{e + 1}{\frac{e}{e} + \frac{1}{e}} = \frac{e + 1}{\frac{e + 1}{e}} = (e + 1) \times \frac{e}{e + 1} = e$$

donc $y = e$.

En remplaçant dans la première ligne du système : $x + y = e + 1$, on obtient :

$$x + e = e + 1 \Leftrightarrow x = e + 1 - e \Leftrightarrow x = 1$$

Le système initial admet un seule couple solution : (1, e).

1

Résoudre($\{\{x+y=\exp(1)+1\}\{x-y*\exp(-1)=0\},\{x,y\}\}$)

→ $\{\{x = 0, y = 0\}\}$

EXP 07 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations :

$$\begin{cases} e^x \times e^y = 1 \\ e^x - e^{y+1} = e - 1 \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^x \times e^y = 1 \\ e^x - e^{y+1} = e - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x \times e^y = 1 \\ e^x - e^y \times e^1 = e - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x \times e^y = 1 \\ e^x - e \times e^y = e - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$, le système devient : $\begin{cases} X \times Y = 1 \\ X - e \times Y = e - 1 \end{cases}$

La première ligne est équivalente à : $Y = \frac{1}{X}$, en remplaçant dans la deuxième ligne on obtient :

$$X - e \times \frac{1}{X} = e - 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{X} - \frac{e}{X} = e - 1 \Leftrightarrow \frac{X^2 - e}{X} = e - 1$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow X^2 - e &= (e - 1)X (*) \Leftrightarrow X^2 - (e - 1)X - e = 0 \\ \Leftrightarrow (X - 1)(X - e) &= 0 \Leftrightarrow X - 1 = 0 \text{ ou } X - e = 0 \\ \Leftrightarrow X &= 1 \text{ ou } X = e \end{aligned}$$

(*) : 1 est une racine évidente de $X^2 - (e - 1)X - e$

On peut aussi utiliser la méthode du discriminant :

$X^2 - (e - 1)X - e$ est de la forme $ax^2 + bX + c$ avec $a = 1$,
 $b = -e + 1$ et $c = -e$, de discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (1 - e)^2 - 4(1)(-e) = 1 - 2e + e^2 + 4e \\ &= e^2 + 2e + 1 = (e + 1)^2 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc $X^2 - (e - 1)X - e$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e - 1 - (e + 1)}{2(1)} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e - 1 + (e + 1)}{2(1)} = \frac{2e}{2} = e$$

on obtient donc : $X = -1$ ou $X = e$.

$$\begin{array}{l|l} X = -1 & \text{ou} & X = e \\ e^x = -1 & & e^x = e \\ impossible & \Leftrightarrow & e^x = e^1 \\ & & \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

On a $Y = \frac{1}{x}$ avec $X = e$ (unique possibilité) donc $Y = \frac{1}{e} = e^{-1}$, puis :
 $e^y = e^{-1} \Leftrightarrow y = -1$

Le système admet un unique couple solution : **(1, -1)**.

Vérification :

$$\begin{aligned} e^x \times e^y &= e^1 \times e^{-1} = e^{1+(-1)} = e^0 = 1 \quad \checkmark \\ e^x - e^{y+1} &= e^1 - e^{-1+1} = e^1 - e^0 = e - 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

EXP 08 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{-x+3} - 1 < 0$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} e^{-x+3} - 1 < 0 &\Leftrightarrow e^{-x+3} < 1 \Leftrightarrow e^{-x+3} < e^0 \Leftrightarrow -x + 3 < 0 \\ &\Leftrightarrow -x < -3 \Leftrightarrow x > 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : **$]3; +\infty[$** .

1	exp(-x+3)-1<0
☐	Résoudre: {x > 3}

EXP 09 Dresser le tableau de signes de : $e^{2x+5} - e^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cherchons pour quelles valeurs de x l'expression $e^{2x+5} - e^{-3x}$ est strictement positive, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} e^{2x+5} - e^{-3x} > 0 &\Leftrightarrow e^{2x+5} > e^{-3x} \Leftrightarrow 2x + 5 > -3x \\ &\Leftrightarrow 2x + 3x > -5 \Leftrightarrow 5x > -5 \Leftrightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-5}{5} \Leftrightarrow x > -1 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$e^{2x+5} - e^{-3x}$	-	$\emptyset$	+

EXP 10 Dresser le tableau de signes de : $-e^{-x} + e^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Cherchons pour quelles valeurs de x l'expression : $-e^{-x} + e^2$ est strictement positive, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} -e^{-x} + e^2 > 0 &\Leftrightarrow -e^{-x} > -e^2 \Leftrightarrow e^{-x} < e^2 \Leftrightarrow -x < 2 \\ &\Leftrightarrow x > -2 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$-e^{-x} + e^2$	-	$\emptyset$	+

EXP 11 Dresser le tableau de signes de : $e^{-x} - \sqrt{e}$, $x \in \mathbb{R}$.

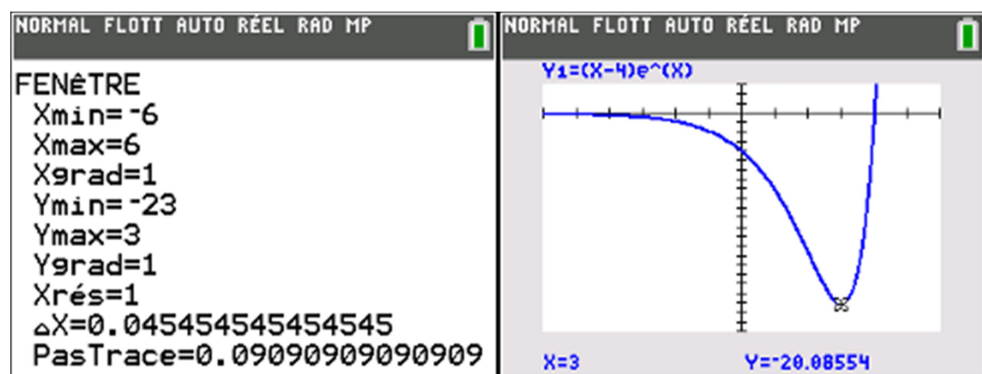
Cherchons pour quelles valeurs de x l'expression : $e^{-x} - \sqrt{e}$ est strictement positive, on a les équivalences :

$$e^{-x} - \sqrt{e} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > \sqrt{e} \Leftrightarrow e^{-x} > e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$e^{-x} - \sqrt{e}$	+	0	-

EXP 12 Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, puis dresser le tableau de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 4)e^x$.



f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x - 4)e^x$$

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^x)' = e^x$

$$f'(x) = 1e^x + e^x(x - 4)$$

$$f'(x) = (1 + x - 4)e^x$$

$$f'(x) = (x - 3)e^x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 3$.

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Règle : $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine.

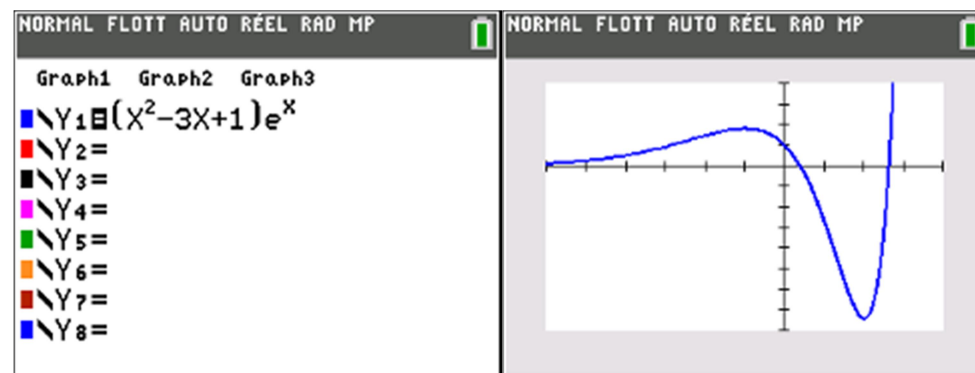
Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x - 3$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$\swarrow$ $-e^3$ $\nearrow$		

$$f(3) = (3 - 4)e^3 = -e^3 \approx -20,1$$

EXP 13 Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, puis dresser le tableau de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.



f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$$

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^x)' = e^x$

$$f'(x) = (2x - 3)e^x + e^x(x^2 - 3x + 1)$$

$$f'(x) = (2x - 3 + x^2 - 3x + 1)e^x$$

$$f'(x) = (x^2 - x - 2)e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - x - 2$.

$x^2 - x - 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = -1$ et $c = -2$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$$

$\Delta > 0$ donc $x^2 - x - 2$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 - \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 + \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Règle : $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines.

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

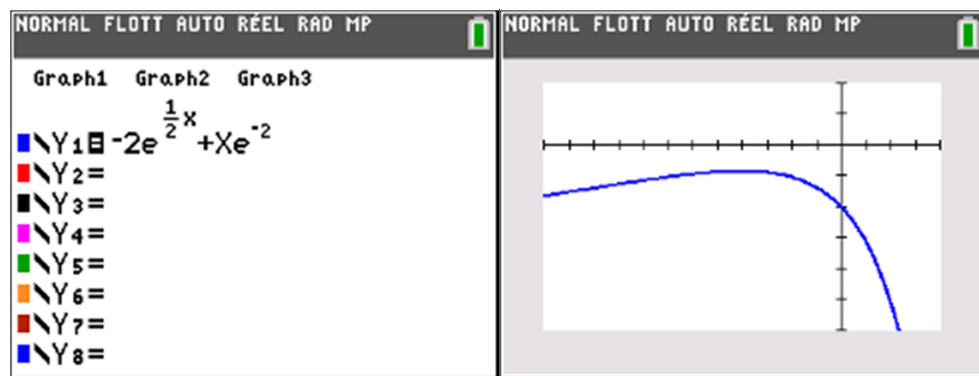
On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
Sens de variation de f	$\nearrow$$5e^{-1}$$\searrow$$-e^2$$\nearrow$				

$$f(-1) = ((-1)^2 - 3(-1) + 1)e^{-1} = (1 + 3 + 1)e^{-1} = 5e^{-1} \approx 1,8$$

$$f(2) = ((2)^2 - 3(2) + 1)e^2 = (4 - 6 + 1)e^2 = -e^2 \approx -7,4$$

EXP 14 Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, puis dresser le tableau de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2e^{0,5x} + xe^{-2}$.



f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = -2e^{\frac{1}{2}x} + xe^{-2}$$

Rappel : $(e^u)' = u'e^u$

$$f'(x) = -2 \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + e^{-2}$$

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{2}x} + e^{-2}$$

Cherchons pour quelles valeurs de x l'expression : $-e^{\frac{1}{2}x} + e^{-2}$ est strictement positive, on a les équivalences :

$$-e^{\frac{1}{2}x} + e^{-2} > 0 \Leftrightarrow -e^{\frac{1}{2}x} > -e^{-2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} < e^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x < -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x \times 2 < -2 \times 2 \Leftrightarrow x < -4$$

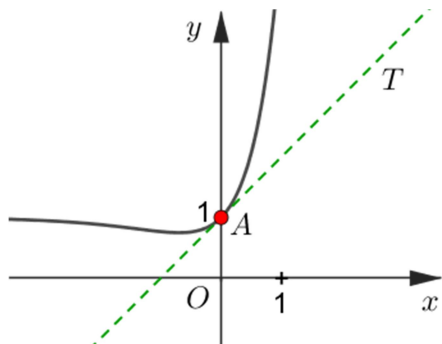
Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f	$\nearrow -6e^{-2} \searrow$		

$$f(-4) = -2e^{\frac{1}{2}(-4)} + (-4)e^{-2} = -2e^{-2} - 4e^{-2} = -6e^{-2} \approx -0,8$$

EXP 15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$ et T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse nulle :



1. Donner l'équation réduite de T .
2. Pour tout réel x , on pose : $h(x) = f(x) - (x + 1)$.
 - a. Calculer $h'(x)$.
 - b. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
En déduire le signe de $h'(x)$ et le tableau de variation de h .
 - c. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T .

1. Équation réduite de T

$$f(x) = e^{2x} - e^x + 1$$

Rappels : $(e^x)' = e^x$ et $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x + 0$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x$$

L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse nulle admet pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, or :

$$f'(0) = 2e^{2(0)} - e^0 = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$f(0) = e^{2(0)} - e^0 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1, \text{ donc on obtient :}$$

$$y = 1(x - 0) + 1, \text{ autrement dit : } y = x + 1.$$

La tangente T admet pour équation réduite : $y = x + 1$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - (x + 1)$.

a. Calcul de $h'(x)$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - (x + 1)' = 2e^{2x} - e^x - 1$$

b. Montrons que ; $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

Développons le membre de droite de l'égalité à démontrer :

$$\begin{aligned} (e^x - 1)(2e^x + 1) &= 2(e^x)^2 + e^x - 2e^x - 1 \\ &= 2e^{2x} - e^x - 1 = h'(x) \end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

Signe de $h'(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $2e^x + 1 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $e^x - 1$.

Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $e^x - 1 > 0$:

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Le signe de $h'(x)$ donne le sens de variation de h .

On en déduit le tableau de variation de h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘ 0 ↗		

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) - (0 + 1) \\ &= e^{2(0)} - e^0 + 1 - 1 \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

c. Position relative de $\mathcal{C}$ et T

On déduit de ce tableau de variation que :

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$ et que : $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

or, pour tout $x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - (x + 1)$

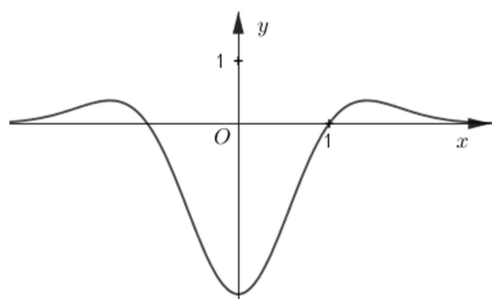
$$\text{et } f(0) = h(0) = 0 + 1 = 1$$

donc :

- pour tout $x \neq 0$, $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de T
- $\mathcal{C}$ et T ont un unique point commun : $A(0; 1)$

EXP 16 Dans le plan muni d'un repère orthogonal on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{x^2 - 1}}$$



Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et préciser en quelles valeurs est atteint.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{x^2 - 1}}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ et $(e^u)' = u'e^u$

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2-1} - 2xe^{x^2-1}(x^2 - 1)}{(e^{x^2-1})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x^2-1}(2x - 2x(x^2 - 1))}{e^{x^2-1} \times e^{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2x^3 + 2x}{e^{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{4x - 2x^3}{e^{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(2 - x^2)}{e^{x^2-1}}$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}$, $e^X > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2-1} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur $2x(2 - x^2)$.

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{2} \Leftrightarrow x = 0$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

$$-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

On obtient :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x$	-		0		+
$-x^2 + 2$	-	0	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-	0	-
Sens de variation de f	$\nearrow \quad \frac{1}{e} \quad \searrow \quad -e \quad \nearrow \quad \frac{1}{e} \quad \searrow$				

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^2 - 1}{e^{(-\sqrt{2})^2 - 1}} = \frac{2 - 1}{e^{2-1}} = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$$

$$f(0) = \frac{0^2 - 1}{e^{0^2 - 1}} = \frac{-1}{e^{-1}} = -1 \times e^1 = -e$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{e^{(\sqrt{2})^2 - 1}} = \frac{2 - 1}{e^{2-1}} = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$$

Le tableau de variation montre que f admet pour maximum $\frac{1}{e}$ et qu'il est atteint en $-\sqrt{2}$ et en $\sqrt{2}$.

EXP 17 Démontrer que, pour tout réel x , on a l'égalité :

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = (e^x - 3)(e^x + 1)$$

On utilise la méthode « de l'un des membres vers l'autre » en identifiant quel membre de départ amènera des calculs simples.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & (e^x - 3)(e^x + 1) \\ &= (e^x)^2 + e^x - 3e^x - 3 \\ &= e^{x \times 2} - 2e^x - 3 \\ &= e^{2x} - 2e^x - 3 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} - 2e^x - 3 = (e^x - 3)(e^x + 1)$$

EXP 18 Démontrer que, pour tout réel x , on a l'égalité :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

On utilise la méthode « de l'un des membres vers l'autre » en identifiant quel membre de départ amènera des calculs simples.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{2}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

Autre méthode :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1} \\ &= 1 - \frac{2}{e^x + 1} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

EXP 19 Démontrer que, pour tout réel x , on a l'égalité :

$$\frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^{2x}} = 1 - 4e^{-2x}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^{2x}} \\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x - 2e^x - 4}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{2x}} \\ &= 1 - 4 \times e^{-2x} \\ &= 1 - 4e^{-2x} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^{2x}} = 1 - 4e^{-2x}$$

EXP 20 Démontrer que, pour tout réel a et tout réel x , on a :

$$\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{e^{2ax} - 1}{e^{2ax} + 1}$$

Corrigé

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} \\ &= \frac{(e^{ax} - e^{-ax}) \times e^{ax}}{(e^{ax} + e^{-a}) \times e^{ax}} \\ &= \frac{(e^{ax})^2 - e^{-a} \times e^{ax}}{(e^{ax})^2 + e^{-ax} \times e^{ax}} \\ &= \frac{e^{2ax} - e^{-ax+ax}}{e^{2ax} + e^{-ax+a}} \\ &= \frac{e^{2a} - e^0}{e^{2ax} + e^0} \\ &= \frac{e^{2a} - 1}{e^{2ax} + 1} \end{aligned}$$

On obtient l'autre membre de l'égalité à démontrer, donc :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{e^{2ax} - 1}{e^{2ax} + 1}$$

EXP 21 a étant une constante provisoirement inconnue, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + a)e^{-x+1}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

Déterminer l'équation réduite de T sachant qu'elle est parallèle à $d : y = -2x$.

Le coefficient directeur de T est $f'(1)$, or T est parallèle à d d'équation réduite $y = -2x$ donc elle a même coefficient directeur (-2) , par conséquent $f'(1) = -2$.
Déterminons $f'(x)$ en fonction de a .

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^u)' = u'e^u$

$$f'(x) = 1e^{-x+1} + (-1)e^{-x+1}(x + a)$$

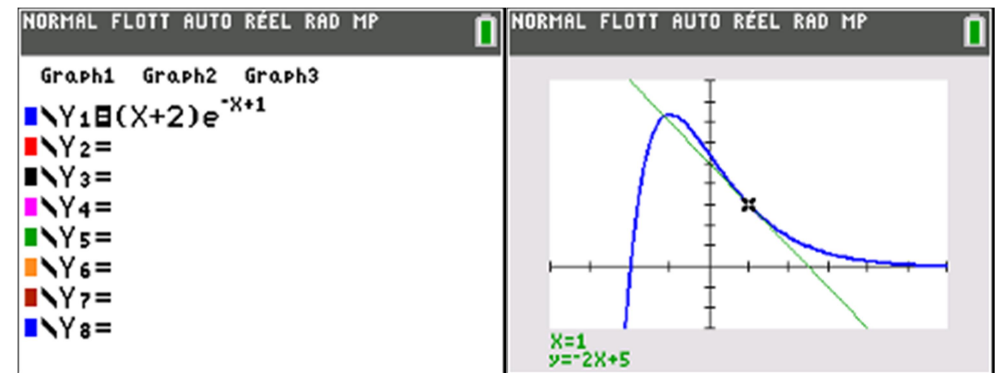
$$f'(x) = (1 - (x + a))e^{-x+1}$$

$$f'(x) = (-x - a + 1)e^{-x+1}$$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f'(1) = -2 &\Leftrightarrow (-1 - a + 1)e^{-1+1} = -2 \Leftrightarrow -ae^0 = -2 \\ &\Leftrightarrow -a \times 1 = -2 \Leftrightarrow -a = -2 \Leftrightarrow a = 2 \end{aligned}$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x + 2)e^{-x+1}$.



La tangente T admet pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Or, $f(1) = (1 + 2)e^{-1+1} = 3e^0 = 3$ et $f'(1) = -2$

donc on obtient : $y = -2(x - 1) + 3$ c'est-à-dire : $y = -2x + 2 + 3$
soit finalement : $y = -2x + 5$.

EXP 22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} + (2 - e)e^x = 2e$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} e^{2x} + (2 - e)e^x = 2e &\Leftrightarrow e^{2x} + (2 - e)e^x - 2e = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 + (2 - e)e^x - 2e = 0 \end{aligned}$$

Posons $X = e^x$, l'équation devient : $X^2 + (2 - e)X - 2e = 0$.

$X^2 + (2 - e)X - 2e$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$,
 $b = 2 - e$ et $c = -2e$, de discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (2 - e)^2 - 4(1)(-2e) = 4 - 4e + e^2 + 8e \\ &= e^2 + 4e + 4 = (e)^2 + 2(e)(2) + (2)^2 = (e + 2)^2 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2 - e) - (e + 2)}{2(1)} = \frac{-2 + e - e - 2}{2} = -2$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2 - e) + (e + 2)}{2(1)} = \frac{-2 + e + e + 2}{2} = e$$

On a donc :

$$\begin{array}{l|l} X = -2 & \text{ou} \quad X = e \\ e^x = -2 & e^x = e \\ \text{impossible} & \Leftrightarrow e^x = e^1 \\ & \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

L'équation de départ admet donc pour unique solution : 1.

