SECOND DEGRÉ

A forme canonique

E01 **Donner la forme canonique de chacune des expressions :**

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 6x + 1} \qquad \boldsymbol{g(x) = x^2 - 5x + 2} \qquad \boldsymbol{h(x) = x^2 + \frac{7}{3}x - 3}$

Corrigé

Canoniser « à la main » l'expression : $1x^2 + bx + c$

$$\boxed{x^2} + \boxed{bx} + \boxed{c} = \underbrace{\boxed{(x)^2} + \boxed{2(x)\left(\frac{b}{2}\right)} + \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b^2}{4} + \boxed{c} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \pm \cdots$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(x)$

$= \boxed{x^2} + \boxed{6x} + \boxed{1}$

$= \underbrace{\boxed{(x)^2} + \boxed{2(x)(3)} + (3)^2}_{(x+3)^2} - 9 + \boxed{1}$

$= (x+3)^2 - 8$

Pour tout réel x, on a : $\boldsymbol{f(x) = (x+3)^2 - 8}$ **(forme canonique).**

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$g(x)$

$= \boxed{x^2} - \boxed{5x} + \boxed{2}$

$= \underbrace{\boxed{(x)^2} - \boxed{2(x)\left(\frac{5}{2}\right)} + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2} - \frac{25}{4} + \boxed{2}$

$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{8}{4}$

$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$

Pour tout réel x, on a : $\boldsymbol{g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}$ **(forme canonique)**

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$h(x)$

$= x^2 + \frac{7}{3}x - 3$

$= \underbrace{(x)^2 + 2(x)\left(\frac{7}{6}\right) + \left(\frac{7}{6}\right)^2}_{\left(x+\frac{7}{6}\right)^2} - \frac{49}{36} - 3$

$= \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} - \frac{108}{36}$

$= \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{157}{36}$

Pour tout réel x,on a : $\boldsymbol{h(x) = \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{157}{36}}$ **(forme canonique)**

E02 **Donner la forme canonique :**

$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 4x - 1} \qquad \boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1} \qquad \boldsymbol{h(x) = -5x^2 + x - \frac{2}{3}}$

Corrigé

Canoniser « à la main » $ax^2 + bx + c$

On commence par mettre de force a en facteur pour obtenir entre crochet une expression $x^2 + \cdots x + \cdots$ que l'on sait canoniser (cas précédent).

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(x)$

$= 3x^2 + 4x - 1$

$= 3\left[\frac{3x^2}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right]$

$= 3\left[x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right]$

$= 3\left[(x)^2 + 2(x)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right]$

$= 3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{3}{9}\right]$

$$= 3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{9}\right]$$
$$= 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$$

Pour tout réel x, on a : $\boldsymbol{f(x) = 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}}$ (**forme canonique**)

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$g(x)$
$$= \frac{1}{2}x^2-3x+1$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{3}{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2-3\times\frac{2}{1}\times x+1\times\frac{2}{1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}[x^2-6x+2]$$
$$= \frac{1}{2}[(x)^2-2(x)(3)+(3)^2-9+2]$$
$$= \frac{1}{2}[(x-3)^2-7]$$
$$= \frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{7}{2}$$

Pour tout réel x, on a : $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{7}{2}}$ (**forme canonique**)

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$h(x)$
$$= -5x^2+x-\frac{2}{3}$$
$$= -5\left[\frac{-5x^2}{-5}+\frac{x}{-5}-\frac{\frac{2}{3}}{-5}\right]$$
$$= -5\left[x^2-\frac{x}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\right]$$
$$= -5\left[x^2-\frac{1}{5}x+\frac{2}{15}\right]$$
$$= -5\left[(x)^2-2(x)\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{100}+\frac{2}{15}\right]$$
$$= -5\left[\left(x-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{37}{300}\right]$$
$$= -5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2-5\times\frac{37}{5\times 60}$$
$$= -5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{37}{60}$$

Pour tour réel x, on a : $\boldsymbol{h(x) = -5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{37}{60}}$ (**forme canonique**)

E03 Donner la forme canonique de $\boldsymbol{f(x) = (x-2)(-x+5)}$.

Corrigé

$f(x)$
$$= (x-2)(-x+5)$$
$$= -x^2+5x+2x-10$$
$$= -x^2+7x-10$$
$$= -[x^2-7x+10]$$
$$= -\left[(x)^2-2(x)\left(\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+10\right]$$
$$= -\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\frac{40}{4}\right]$$
$$= -\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]$$
$$= -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

Pour tout réel x, on a : $\boldsymbol{f(x) = -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$ (**forme canonique**)

E04 **Préciser les valeurs respectives de a, α, β pour chacune des formes canonique : $f(x) = 3(x-5)^2 - 7$ et $g(x) = -(x+2,5)^2 + 3$.**

Corrigé

Définition La forme canonique s'écrit : $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

- $f(x) = 3(x-5)^2 - 7$

On a : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a = 3$, $\alpha = 5$ et $\beta = -7$.

- $g(x) = -(x+2{,}5)^2 + 3$

Remarquons que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (-1) \times \left(x - (-2{,}5)\right)^2 + 3$.

On a : $g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = -2{,}5$ et $\beta = 3$.

E05 **Déterminer « à la main » la forme canonique c'est-à-dire sans utiliser les formules du cours :**

$\boldsymbol{A(x) = x^2 + 6x + 10} \quad \boldsymbol{B(x) = -x^2 + 10x - 3} \quad \boldsymbol{C(x) = 2x^2 - 3x + 5}$

Corrigé

$A(x) = x^2 + 6x + 10$

$A(x) = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 - 9 + 10$

Pour tout réel x, on a : $\boldsymbol{A(x) = (x+3)^2 + 1}$ (forme canonique).

$B(x) = -x^2 + 10x - 3$

$B(x) = -[x^2 - 10x + 3]$

$B(x) = -[(x)^2 - 2(x)(5) + (5)^2 - 25 + 3]$

$B(x) = -[(x-5)^2 - 22]$

Pour tout réel x, on a : $\boldsymbol{B(x) = -(x-5)^2 + 22}$ (forme canonique).

$C(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$$C(x) = 2\left[\frac{2x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}\right]$$

$$C(x) = 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right]$$

$$C(x) = 2\left[(x)^2 - 2(x)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{5}{2}\right]$$

$$C(x) = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{40}{16}\right]$$

$$C(x) = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{C(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}} \quad \textbf{(forme canonique)}$$

E06 **À l'aide des formules du cours, donner la forme canonique de $f(x)$ telle que, pour tout réel x : $f(x) = -x^2 + 8x + 3$.**

Corrigé

Forme canonique de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$: les formules

Pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, la forme canonique s'écrit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

$f(x) = -x^2 + 8x + 3$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 8$ et $c = 3$. On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-1)} = +4$$

$$\beta = f(\alpha) = -(4)^2 + 8(4) + 3 = -16 + 32 + 3 = 19$$

La forme canonqiue s'écrit $a(x-\alpha)^2 + \beta$ donc, pour tout réel x, on a :

$\boldsymbol{f(x) = -(x-4)^2 + 19}$ **(forme canonique)**.

E07 **Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 7x^2 + \dfrac{5}{4}x + \dfrac{2}{3}$.**

À l'aide des formules du cours, déterminer la forme canonique de $f(x)$.

Corrigé

$7x^2 + \dfrac{5}{4}x + \dfrac{2}{3}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 7$, $b = \dfrac{5}{4}$ et $c = \dfrac{2}{3}$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{5}{4}}{2(7)} = \frac{-\frac{5}{4}}{14} = -\frac{5}{4} \times \frac{1}{14} = -\frac{5 \times 1}{4 \times 14} = -\frac{5}{56}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{5}{56}\right) = 7\left(-\frac{5}{56}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(-\frac{5}{56}\right) + \frac{2}{3} = \frac{821}{1\,344}$$

La forme canonique s'écrit : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Pour tout réel x, on a :

$$\boldsymbol{f(x) = 7\left(x + \frac{5}{56}\right)^2 + \frac{821}{1\,344}} \quad \textbf{(forme canonique)}$$

B factoriser

E01 Factoriser dans $\mathbb{R}$: $A(x) = 6x^2 - 7x$ et $B(x) = -4x^2 + 9x$.

factoriser $ax^2 + bx$
x « apparaît partout » donc on peut le mettre en facteur !

Corrigé

• $A(x) = 6x^2 - 7x = x(6x - 7)$
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{A(x) = x(6x - 7)}$. (**forme factorisée**)

• $B(x) = -4x^2 + 9x = x(-4x + 9)$
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{B(x) = x(-4x + 9)}$. (**forme factorisée**)
💣 $-4x^2 + 9x \neq \cancel{(3x + 2)(3x - 2)}$

E02 Factoriser dans $\mathbb{R}$, lorsque cela est possible :

$\boldsymbol{C(x) = x^2 - 4}$ $\boldsymbol{D(x) = 9x^2 - 16}$ $\boldsymbol{E(x) = x^2 - 7}$
$\boldsymbol{F(x) = 5x^2 - 3}$ $\boldsymbol{G(x) = x^2 + 7}$ $\boldsymbol{H(x) = -4x^2 - 13}$

Corrigé

factoriser $ax^2 + c, a \neq 0$
On tente de se ramener à la forme : $(\ldots)^2 - (\ldots)^2$ qui se factorise en utilisant : $(A)^2 - (B)^2 = (A + B)(A - B)$.
💣 les formes suivantes ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$:
« $(A)^2 + k^2$ » et « $-(A)^2 - k^2$ », avec k constante non nulle.

• $C(x) = x^2 - 4 = (x)^2 - (2)^2 = (x + 2)(x - 2)$
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{C(x) = (x + 2)(x - 2)}$. (**forme factorisée**)

• $D(x) = 9x^2 - 16 = (3x)^2 - (4)^2 = (3x + 4)(3x - 4)$
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{D(x) = (3x + 4)(3x - 4)}$. (**forme factorisée**)

• $E(x) = x^2 - 7 = (x)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = \boldsymbol{\left(x + \sqrt{7}\right)\left(x - \sqrt{7}\right)}$. (**forme factorisée**)

• $F(x) = 5x^2 - 3 = \left(x\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(x\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(x\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$
$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{F(x) = \left(x\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(x\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)}$. (**forme factorisée**)

• $G(x) = x^2 + 7 = (x)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$
donc $\boldsymbol{G(x)}$ **n'est pas factorisable** dans $\mathbb{R}$

• $H(x) = -4x^2 - 13 = -(2x)^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$
donc $\boldsymbol{H(x)}$ **n'est pas factorisable dans** $\mathbb{R}$

E03 Factoriser dans $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{I(x) = 2x^2 + 11x - 13 \quad \text{et} \quad J(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1}$$

Corrigé

$\boxed{D}$ Une **racine** d'une expression du second degré est un nombre réel annulant cette expression.
exemple
$3^2 + 3 - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$ donc 3 est une racine de l'expression $x^2 + x - 12$.

$\boxed{F}$ **Calcul des racines éventuelles de $ax^2 + bx + c, a \neq 0$**
• si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c$ admet une seule racine : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
• Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de racine réelle.

$\boxed{F}$ **Formules de factorisation**
Pour une expression du second degré ayant **trois** termes, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ puis les racines réelles éventuelles :
• si $\Delta > 0$, une factorisation est : $a(x - x_1)(x - x_2)$
• si $\Delta = 0$, une factorisation est : $a(x - x_0)^2$
• si $\Delta < 0$, l'expression n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$

• $I(x) = 2x^2 + 11x - 13$
$2x^2 + 11x - 13$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = 11$ et $c = -13$, son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (11)^2 - 4(2)(-13) = 121 + 104 = 225$$

On constate que $\Delta > 0$ donc $2x^2 + 11x - 13$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11-\sqrt{225}}{2(2)} = \frac{-11-15}{4} = \frac{-26}{4} = -\frac{13}{2}$$
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11+\sqrt{225}}{2(2)} = \frac{-11+15}{4} = \frac{4}{4} = 1$$
Or, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ (cours) donc pour tout réel x :
$$\boldsymbol{I(x) = 2\left(x+\frac{13}{2}\right)(x-1)} \quad \textbf{(forme factorisée)}$$
Remarque : une autre factorisation est $\boldsymbol{I(x) = (2x+13)(x-1)}$.

On peut vérifier au brouillon en développant la forme factorisée obtenue :

$(2x+13)(x-1) = 2x^2-2x+13x-13 = 2x^2+11x-13 = I(x)$ ✓

• $J(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$
et $c=-5$, de discriminant :
$$\Delta = b^2-4ac = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{1}{4}+2 = \frac{1}{4}+\frac{8}{4} = \frac{9}{4}$$
On constate que $\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\frac{9}{4}}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{1} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{9}{4}}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1} = 2$$
Or, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ (cours)
donc : $\forall x \in \mathbb{R}, J(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)$ ou encore : $\boldsymbol{(x+1)\left(\frac{1}{2}x-1\right)}$.

On peut vérifier au brouillon en développant la forme factorisée obtenue :
$$(x+1)\left(\frac{1}{2}x-1\right) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = J(x)$$

E04 Factoriser dans $\mathbb{R}$, lorsque cela est possible :
$$\boldsymbol{K(x) = -x^2+12x-36 \ \text{ et } \ L(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1}$$

Corrigé

• $K(x) = -x^2+12x-36$

$-x^2+12x-36$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-1, b=12$
et $c=-36$, de dsicriminant :
$$\Delta = b^2-4ac = (12)^2-4(-1)(-36) = 144-144 = 0$$
On constate que $\Delta = 0$ donc il y a une seule racine :
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-1)} = +\frac{12}{2} = 6$$
Or, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ donc : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{K(x) = -(x-6)^2}$.

On peut vérifier au brouillon en développant la forme factorisée obtenue :
$$-(x-6)^2 = -(x^2-12x+36) = -x^2+12x-36 = K(x)$$

• $L(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

$\frac{1}{4}x^2 - x + 1$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=\frac{1}{4}$, $b=-1$ et $c=1$,
de discriminant :
$$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\left(\frac{1}{4}\right)(1) = 1-1 = 0$$
On constate que $\Delta = 0$ donc il y a une seule racine :
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{+1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1\times\frac{2}{1} = 2$$
Or, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ (cours) donc : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{L(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2}$.

On peut vérifier au brouillon en développant la forme factorisée obtenue :
$$\frac{1}{4}(x-2)^2 = \frac{1}{4}(x^2-4x+4) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = L(x)$$

E05 Factoriser dans $\mathbb{R}$, si cela est possible : $\boldsymbol{M(x) = 3x^2-2x+5}$.

Corrigé

$3x^2-2x+5$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=3$, $b=-2$ et $c=5$,
de discriminant : $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4(3)(5) = 4-60 = -56$.
On constate que $\Delta < 0$ donc $\boldsymbol{E(x)}$ **n'est pas factorisable dans** $\mathbb{R}$.

C inéquation

E01 Dresser le tableau de signes de : $x^2 + 2x - 35$, en déduire les solutions de l'inéquation : $x(x+2) < 35$.

Corrigé

On a les équivalences :

$$x(x+2) < 35 \Leftrightarrow x^2 + 2x < 35 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 35 < 0$$

$x^2 + 2x - 35$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -35$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-35) = 4 + 140 = 144$.
$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{144}}{2(1)} = \frac{-2-12}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{144}}{2(1)} = \frac{-2+12}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Règle $ax^2 + bx + c$ est « du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		5		$+\infty$
$x^2+2x-35$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La dernière ligne de ce tableau de signes montre que l'ensemble des solutions de $x^2 + 2x - 35 < 0$ est :

$$\boldsymbol{S =]-7\,;5[}$$

E02 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2x-3)(x+1) \geqslant 3x^2 - 4$.

Corrigé

On a les équivalences :

$$(2x-3)(x+1) \geqslant 3x^2 - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 3x - 3 \geqslant 3x^2 - 4$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 \geqslant 3x^2 - 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 - 3x^2 + 4 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 1 \geqslant 0$$

$-x^2 - x + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = -1$ et $c = 1$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-1)(1) = 1 + 4 = 5$
$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1-\sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1+\sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62$$

Règle $ax^2 + bx + c$ est « du signe de a à l'extérieur des racines ».

tableau de signes

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$-x^2-x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le tableau de signes précédent donne l'ensemble des solutions :

$$S = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

E03 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 28x + 15$.
• déterminer la constante réelle c telle que, pour tour réel x :

$$\boldsymbol{f(x) = (x-1)(-2x^2 + 13x + c)}$$

• dresser le tableau de signes de $f(x)$
• résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$.

Corrigé

• déterminons la constante réelle c

Développons :

$$(x-1)(-2x^2 + 13x + c) = -2x^3 + 13x^2 + cx + 2x^2 - 13x - c$$
$$= -2x^3 + 15x^2 + (c-13)x - c$$

On doit donc avoir, pour tout réel x :

$$f(x) = -2x^3 + 15x^2 + (c-13)x - c$$

Or, pour tout réel x : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 28x + 15$.

Par identification des coefficients, on en déduit que : $\begin{cases} c - 13 = -28 \\ -c = 15 \end{cases}$

qui s'écrit aussi $\begin{cases} c = -28 + 13 \\ c = -15 \end{cases}$, soit $\begin{cases} c = -15 \\ c = -15 \end{cases}$, qui se réduit à : $c = -15$.

Il est nécessaire d'obtenir deux fois la même valeur pour c.

• **tableau de signes de $f(x)$**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)(-2x^2 + 13x - 15)$.

• étude de : $x - 1$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

• étude de : $-2x^2 + 13x - 15$

$-2x^2 + 13x - 15$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 13$ et $c = -15$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (13)^2 - 4(-2)(-15) = 169 - 120 = 49$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 - \sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-13 - 7}{-4} = \frac{-20}{-4} = +\frac{4 \times 5}{4} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 + \sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-13 + 7}{-4} = \frac{-6}{-4} = +\frac{3}{2}$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines »

• tableau de signes

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
Signe de $(1x - 1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $(-2x^2 + 13x - 15)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

• **résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$**

$$15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3 \Leftrightarrow 15x^2 - 28x + 15 - 12x^3 \geqslant 2x^3 - 2x^3$$
$$\Leftrightarrow 15x^2 - 28x + 15 - 12x^3 \geqslant 0$$

L'inéquation $15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$ est donc équivalente à $f(x) \geqslant 0$

La dernière ligne du tableau de signes précédent donne alors :

$$\boldsymbol{S =]-\infty\,;\,1] \cup \left[\frac{3}{2}\,;5\right]}$$

E04 Résoudre l'inéquation :

$$\boldsymbol{\frac{3x}{-x+5} \geqslant \frac{1}{x-1}}$$

Corrigé

• **recherche de valeur(s) interdite(s)**

Il faut que $-x + 5 \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \neq 5$ et $x \neq 1$.
Les valeurs interdites sont donc : 1 et 5.

• **résolution**

Pour x différent d'une valeur interdite, on a les équivalences :

$$\frac{3x}{-x+5} \geqslant \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-x+5} - \frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-x+5} - \frac{1}{x-1} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x \times (x-1)}{(-x+5) \times (x-1)} - \frac{1 \times (-x+5)}{(x-1) \times (-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x(x-1) - (-x+5)}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 3x + x - 5}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x - 5}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$3x^2 - 2x - 5$ est de la forme $3x^2 - 2x - 5$ avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = -5$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-5) = 4 + 60 = 64$$

$\Delta > 0$ donc $3x^2 - 2x - 5$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{2 - 8}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{2 + 8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines »
Règle : « $ax+b$ est du signe de a à droite de sa racine »

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{3}$		5		$+\infty$
$3x^2-2x-5$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+5$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

L'inéquation s'écrit $Q(x) \geqslant 0$, la dernière ligne du tableau de signes précédent donne alors :

$$\boldsymbol{S = [-1;1[\,\cup\left[\frac{5}{3};5\right[}$$

E05 On munit le plan d'un repère, f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = -x^2+8x-14 \text{ et } g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + 10}$$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Corrigé

La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir du signe de la différence $f(x)-g(x)$.
On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x)-g(x) \\ &= -x^2+8x-14-\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{15}{4}x+10\right) \\ &= -x^2+8x-14-\frac{1}{4}x^2+\frac{15}{4}x-10 \\ &= -\frac{4}{4}x^2-\frac{1}{4}x^2+\frac{32}{4}x+\frac{15}{4}-14-10 \\ &= -\frac{5}{4}x^2+\frac{47}{4}x-24 \end{aligned}$$

$-\frac{5}{4}x^2+\frac{47}{4}x-24$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-\frac{5}{4}$, $b=\frac{47}{4}$ et $c=-24$, de discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = \left(\frac{47}{4}\right)^2 - 4\left(-\frac{5}{4}\right)(-24) = \frac{289}{16} = \left(\frac{17}{4}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{47}{4}-\frac{17}{4}}{2\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{64}{4}}{-\frac{5}{2}} = +\frac{16}{\frac{5}{2}} = 16\times\frac{2}{5} = \frac{32}{5}\ (=6{,}4)$$

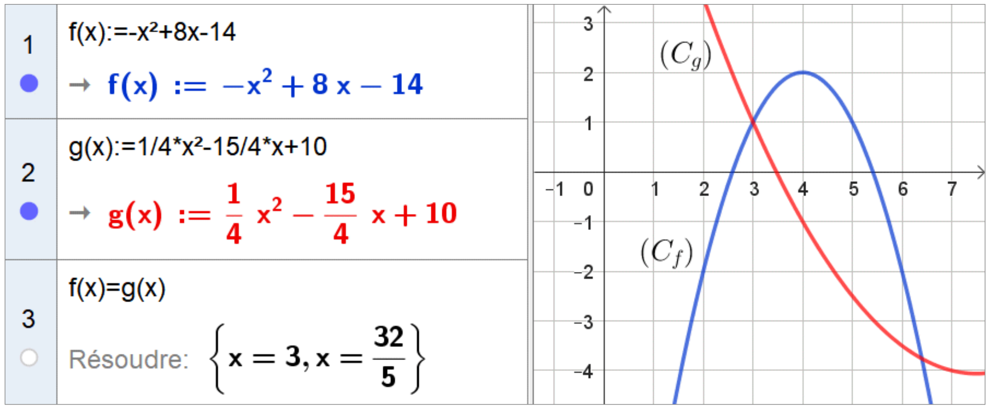
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{47}{4}+\frac{17}{4}}{2\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{30}{4}}{-\frac{5}{2}} = +\frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{15}{2}\times\frac{2}{5} = \frac{15\times 2}{2\times 5} = 3$$

Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$\frac{32}{5}$		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- sur $]-\infty;3[$ et sur $]\frac{32}{5};+\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement **en dessous** de $\mathcal{C}_g$
- sur $]3;\frac{32}{5}[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$
- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 3 et $\frac{32}{5}$



Complément

$$f(3) = -(3)^2 + 8(3) - 14 = 1 \quad (= g(3))$$

$$f\left(\frac{32}{5}\right) = -\left(\frac{32}{5}\right)^2 + 8\left(\frac{32}{5}\right) - 14 = -\frac{94}{25} \quad \left(= g\left(\frac{32}{5}\right)\right)$$

Les points d'intersection des deux courbes sont :

$$E(3\,;1) \quad \text{et} \quad F\left(\frac{32}{5}\,;\,-\frac{94}{25}\right)$$

E06 Dans le plan muni d'un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 7$ et g la fonction affine dont la droite représentative passe par $A(-1\,;4)$ et $B(5\,;1)$: étudier la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_g$.

Corrigé

Pour tout réel x, on a : $g(x) = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{5-(-1)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

donc :

$$g(x) = -\frac{1}{2}\big(x - (-1)\big) + 4 = -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{8}{2} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}x + \frac{-1+8}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

On a donc, pour tout réel x : $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

La position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir du signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - g(x) \\ &= x^2 - 5x + 7 - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}\right) \\ &= x^2 - 5x + 7 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \\ &= x^2 - 5x + \frac{1}{2}x + 7 - \frac{7}{2} \\ &= x^2 - \frac{10}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{14}{2} - \frac{7}{2} \\ &= x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{7}{2}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -\frac{9}{2}$ et $c = \frac{7}{2}$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{81}{4} - \frac{28}{2} = \frac{81}{4} - \frac{56}{4} = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{9}{2} - \frac{5}{2}}{2(1)} = \frac{\frac{4}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

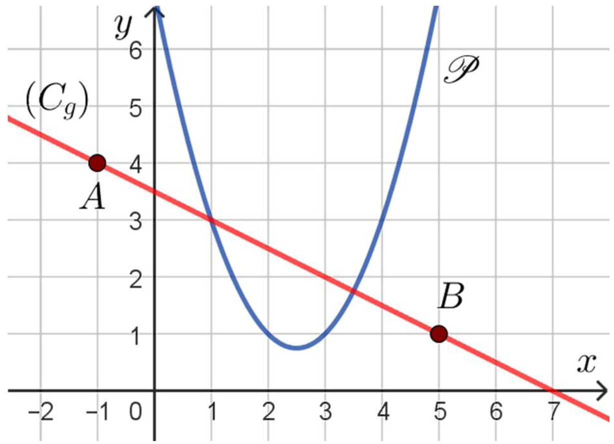
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{9}{2} + \frac{5}{2}}{2(1)} = \frac{\frac{14}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- sur $]-\infty; 1[$ et sur $]\frac{7}{2}\,;\,+\infty[$: $\mathcal{P}$ est strictement **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$
- sur $]1\,;\frac{7}{2}[$: $\mathcal{P}$ est strictement **en dessous** de $\mathcal{C}_g$
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 1 et $\frac{7}{2}$



Complément

Les points d'intersection ont pour coordonnées $(1; 3)$ et $\left(\frac{7}{2}\,;\frac{7}{4}\right)$.

D équation

Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec $a\neq 0$, sont les racines de ax^2+bx+c c'est-à-dire les valeurs de x annulant cette expression.

E01 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)(2x+3)=8x+12$.

Corrigé

$(x-1)(2x+3)=8x+12 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2x-3=8x+12$
$\Leftrightarrow 2x^2+3x-2x-8x-3-12=0 \Leftrightarrow 2x^2-7x-15=0$

$2x^2-7x-15$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=2$, $b=-7$ et $c=-15$, de discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4(2)(-15)=49+120=169$$

On constate que $\Delta>0$ donc $2x^2-7x-15$ admet deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+7-\sqrt{169}}{2(2)}=\frac{7-13}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+7+\sqrt{169}}{2(2)}=\frac{7+13}{4}=\frac{20}{4}=5$$

L'équation de départ admet pour solutions : $-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ **et 5**.

On écrit aussi :

$$S=\left\{-\frac{3}{2}\,;5\right\} \text{ ou encore } S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{3}{2};5\right\}$$

E02 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4x(x+5)=-25$.

Corrigé

On a : $4x(x+5)=-25 \Leftrightarrow 4x^2+20x+25=0$.
$4x^2+20x+25$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=4$, $b=20$ et $c=25$, de discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(20)^2-4(4)(25)=400-400=0$$

On constate que $\Delta=0$ donc $4x^2+20x+25$ admet une seule racine :

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2(4)}=-\frac{4\times 5}{4\times 2}=-\frac{5}{2}$$

L'équation $4x(x+5)=-25$ admet pour unique solution **:** $-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$.

Autre méthode

$4x^2+20x+25=0 \Leftrightarrow (2x)^2+2(2x)(5)+(5)^2=0 \Leftrightarrow (2x+5)^2=0$
$\Leftrightarrow 2x+5=0 \Leftrightarrow 2x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

E03 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2-5x+10=0$.

Corrigé

$x^2-5x+10$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1, b=-5$ et $c=10$, de discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(10)=25-40=-15$.
On constate que $\Delta<0$ donc $x^2-5x+10$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ par conséquent $x^2-5x+10=0$ **n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.**

E04 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2(x^2-9)=52$.

Corrigé

$x^2(x^2-9)=52 \Leftrightarrow x^4-9x^2=52 \Leftrightarrow x^4-9x^2-52=0$
$\Leftrightarrow (x^2)^2-9(x^2)-52=0$
En posant $X=x^2$, cette équation s'écrit : $X^2-9X-52=0$.
$X^2-9X-52$ est de la forme aX^2+bX+c avec $a=1$, $b=-9$ et $c=-52$, de discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4(1)(-52)=81+208=289$$

On constate que $\Delta>0$ donc l'équation $X^2-9X-52$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+9-\sqrt{289}}{2(1)}=\frac{9-17}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$
$$X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+9+\sqrt{289}}{2(1)}=\frac{9+17}{2}=\frac{26}{2}=13$$

On a donc $X=-4$ ou $X=13$, or $X=x^2$, donc : $x^2=-4 \;\; ou \;\; x^2=13$.

• $x^2=-4$ est de la forme $x^2=k$ avec $k<0$ donc n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

• $x^2=13 \Leftrightarrow x=-\sqrt{13} \;\; ou \; x=\sqrt{13}$.

Conclusion

L'équation de départ admet pour solutions : $-\sqrt{\mathbf{13}}$ **et** $\sqrt{\mathbf{13}}$.

E05 **Pour tout réel x, on pose : $P(x) = x^2 - (3 + 2\sqrt{3})x + 6\sqrt{3}$.**

1. **Vérifier que 3 est une racine du polynôme P.**
2. **Démontrer que :**
   « si un polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ admet deux racines réelles distinctes, alors leur somme est égale à $\left(-\frac{b}{a}\right)$ et leur produit est égal à $\frac{c}{a}$ ».
3. **En déduire la deuxième racine de P.**

Corrigé

1. $P(3) = 3^2 - (3 + 2\sqrt{3}) \times 3 + 6\sqrt{3} = 9 - 9 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 0.$
   On constate que $P(3) = 0$ donc 3 est une racine du polynôme P.
2. On sait qu'en notant x_1 et x_2 les racines distinctes, on a :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
   On a d'une part :
   $$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} + (-b + \sqrt{\Delta})}{2a}$$
   $$= \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$
   La somme des racines est bien égale à : $-\frac{b}{a}$.

   D'autre part on a :
   $$x_1 \times x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{2a \times 2a}$$
   $$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4a \times c}{4a \times a} = \frac{c}{a}$$
   Le produit des deux racines est bien égal à : $\frac{c}{a}$.
3. En notant $x_1 = 3$ et x_2 les deux racines de P, on a :
   $$3 \times x_2 = \frac{6\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow 3 \times x_2 = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow x_2 = \frac{6\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_2 = 2\sqrt{3}$$
   La deuxième racine de P est : $2\sqrt{3}$.
   (on peut aussi utiliser la formule de la somme)

E06 **La somme de deux nombres réels est 7 et leur produit est 12 : quels sont ces deux nombres ?**

Corrigé

En notant x et y les deux nombres cherchés, on a : $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$

On a les équivalences :
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ x(7 - x) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ -x^2 + 7x - 12 = 0 \end{cases}$$

$x^2 - 7x + 12$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(12) = 49 - 48 = 1.$
$\Delta > 0$ donc $x^2 - 7x + 12$ admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
Si $x = 3$, alors : $y = 7 - x = 7 - 3 = 4$.
Si $x = 4$, alors : $y = 7 - 4 = 3$.
Il y a donc deux couples solutions : $(3\,;4)$ et $(4\,;3)$ par conséquent **les deux nombres cherchés sont donc 3 et 4**.

E07 **Résoudre l'équation :**
$$\frac{5x + 1}{x + 2} = -x + 3$$

Corrigé

• domaine d'existence
Le dénominateur $x + 2$ doit être non nul : $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.
Il y a donc une seule valeur interdite : -2.
On écrit parfois $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-2\}$ ou encore $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

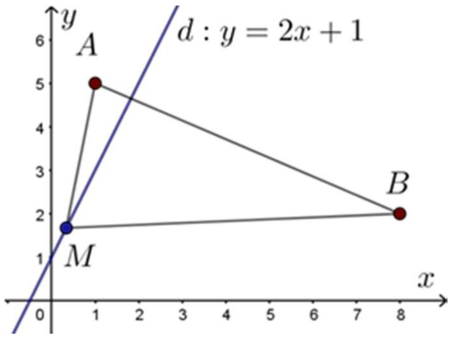
• résolution
Pour $x \neq -2$, on a les équivalences :
$$\frac{5x + 1}{x + 2} = -x + 3 \Leftrightarrow \frac{5x + 1}{x + 2} \times (x + 2) = (-x + 3) \times (x + 2)$$
$$\Leftrightarrow 5x + 1 = -x^2 - 2x + 3x + 6 \Leftrightarrow 5x + 1 + x^2 + 2x - 3x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

x^2+4x-5 est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$, $b=4$ et $c=-5$,
de discriminant : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4(1)(-5)=16+20=36$.
On constate que $\Delta>0$ donc x^2+4x-5 admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{36}}{2(1)}=\frac{-4-6}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{36}}{2(1)}=\frac{-4+6}{2}=\frac{2}{2}=1$$

(-5) et 1 sont distincts de la valeur interdite (-2) donc sont acceptés.
L'équation de départ admet pour solutions : $\mathbf{-5}$ **et** $\mathbf{1}$.

E07 Dans un repère orthonormé on considère $A(1;5)$ et $B(8;2)$ et on note d la droite d'équation $y=2x+1$, M est un point variable de d :



1. Calculer AB^2.
2. Montrer que, si on note x_M l'abscisse de M, alors, avec les notations de l'exercice on a l'équivalence :
   $$ABM \text{ est rectangle en } M \Leftrightarrow 5x_M^2-19x_M+12=0$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2-19x+12=0$.
   En déduire pour quelles positions M_1 et M_2 de M le triangle ABM est rectangle en M, donner les coordonnées de ces deux points.

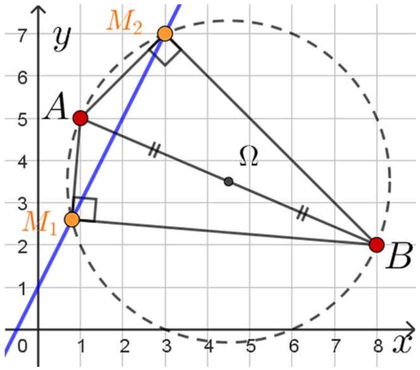
Corrigé

1. Le repère est orthonormé donc on peut utiliser la formule de la distance :
   $$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(8-1)^2+(2-5)^2}=\sqrt{49+9}$$
   $$=\sqrt{58}$$
   $$\boldsymbol{AB=\sqrt{58}}$$
2. $M\in d: y=2x+1$ donc $y_M=2x_M+1$, on a donc $M(x_M;2x_M+1)$.
   $$AM=\sqrt{(x_M-1)^2+(2x_M+1-5)^2}$$
   $$AM^2=(x_M-1)^2+(2x_M-4)^2$$
   $$AM^2=x_M^2-2x_M+1+4x_M^2-16x_M+16$$
   $$AM^2=5x_M^2-18x_M+17$$
   $$BM=\sqrt{(x_M-8)^2+(2x_M+1-2)^2}$$
   $$BM^2=(x_M-8)^2+(2x_M-1)^2$$
   $$BM^2={x_M}^2-16x_M+64+4x_M^2-4x_M+1$$
   $$BM^2=5x_M^2-20x_M+65$$
   Avec les notations de l'exercice, on a les équivalences :
   ABM est rectangle en $M \Leftrightarrow AB^2=AM^2+MB^2$ (Pythagore)
   $$\Leftrightarrow AM^2+BM^2-AB^2=0$$
   $$\Leftrightarrow 5x_M^2-18x_M+17+5x_M^2-20x_M+65-58=0$$
   $$\Leftrightarrow 10{x_M}^2-38x_M+24=0 \Leftrightarrow 2(5x_M^2-19x_M+12)=0$$
   $$\Leftrightarrow 5x_M^2-19x_M+12=0$$
   Avec les notations de l'exercice on a donc bien l'équivalence :
   $$ABM \text{ est rectangle en } M \Leftrightarrow 5x_M^2-19x_M+12=0.$$
3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2-19x+12=0$.
   $5x^2-19x+12$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=5$, $b=-19$ et $c=12$, de discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-19)^2-4(5)(12)=121$
   $\Delta>0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+19-\sqrt{121}}{2(5)}=\frac{19-11}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0{,}8$$
   $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+19+\sqrt{121}}{2(5)}=\frac{19+11}{10}=\frac{30}{10}=3$$
   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $5x^2-19x+12=0$ sont : 0,8 et 3.
4. Si $x_M=0{,}8$ on a : $y_M=2x_M+1=2\times0{,}8+1=1{,}6+1=2{,}6$
   Si $x_M=3$ on a : $y_M=2x_M+1=2(3)+1=7$

   Deux positions de M répondent à la question : $\boldsymbol{M_1(0{,}8\,;2{,}6)}$ et $\boldsymbol{M_2(3\,;7)}$.

Complément

On peut obtenir à la règle et au compas ces deux points : ce sont les points d'intersection de d et du cercle dont un diamètre est $[AB]$.



E sens de variation

E01 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.
Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

Corrigé

Sens de variation de $x \mapsto ax^2 + bx + c, a \neq 0$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.
- si $a > 0$, alors :
  f est ↘ sur $]-\infty; \alpha]$ et f est ↗ sur $[\alpha; +\infty[$
  (lorsque $a > 0$ on pense à une parabole « sourire »)
- si $a < 0$, alors :
  f est ↗ sur $]-\infty; \alpha]$ et f est ↘ sur $[\alpha; +\infty[$
  (lorsque $a < 0$ on pense à une parabole « pas sourire »)

$2x^2 - 8x + 5$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -8$ et $c = 5$. On a :

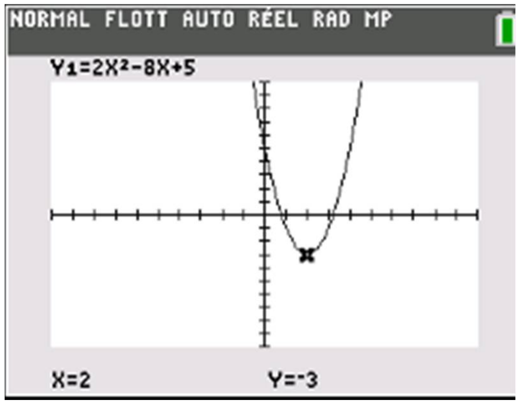
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+8}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

$a > 0$ donc :
f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ i.e. sur $]-\infty; 2]$
f est strictement croissante sur $[\alpha\,; +\infty[$ i.e. sur $[2\,; +\infty[$

$\beta = f(\alpha) = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 5 = 8 - 16 + 5 = -3$

tableau de variation de f

x	$-\infty$	$\alpha = 2$	$+\infty$
Sens de variation de f	↘	$\beta = -3$	↗



E02 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x + 1$.
Étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.

Corrigé

$-x^2 + 8x + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 8$ et $c = 1$.
On a :

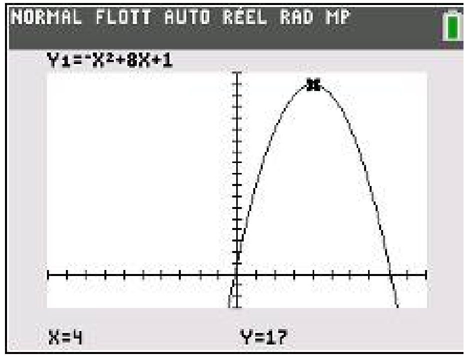
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-1)} = \frac{-8}{-2} = +4$$

$a < 0$ donc :
f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ i.e. sur $]-\infty; 4]$
f est strictement décroissante sur $[\alpha\,; +\infty[$ i.e. sur $[4\,; +\infty[$

$\beta = f(\alpha) = f(4) = -(4)^2 + 8(4) + 1 = -16 + 32 + 1 = 17$

tableau de variation de f

x	$-\infty$	$\alpha = 4$	$+\infty$
Sens de variation de f	↗	$\beta = 17$	↘



E03 Le potager rectangulaire
On doit délimiter un potager rectangulaire $ABCD$ et le clôturer sur ses quatre côtés : on dispose pour cela de matériaux permettant de construire au total 20 mètres de clôture et on pose : $AB = x$.

1. Exprimer l'aire $f(x)$ du potager uniquement en fonction de x.
2. Pourquoi doit-on étudier f sur l'intervalle $[0; 10]$ uniquement ?
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 10]$, en déduire la distance AB pour laquelle l'aire du potager est maximale.

Corrigé

1. Posons $y = AD$. On dispose de 20 m de clôture et elle sera entièrement utilisée donc : $2x + 2y = 20$, autrement dit : $x + y = 10$, ou encore : $y = 10 - x$.

L'aire $f(x)$ du rectangle $ABCD$ est :

$$f(x) = AB \times AD = x \times (10 - x) = 10x - x^2 = -x^2 + 10x$$

2. On a d'une part $AB \geqslant 0$, autrement dit $x \geqslant 0$,
et d'autre part : $AD \geqslant 0$, qui s'écrit $y \geqslant 0$, autrement dit :

$$10 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow 10 - x + x \geqslant 0 + x \Leftrightarrow 10 \geqslant x$$

Résumons : $0 \leqslant x$ et $x \leqslant 10$, autrement dit $x \in [0; 10]$.

3. Pour tout $x \in [0\,; 10]$, $f(x) = -x^2 + 10x$.
$-x^2 + 10x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 10$ et $c = 0$, on a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-1)} = +\frac{10}{2} = 5$$

$a = -1$, $a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $[0\,; \alpha]$ c'est-à-dire sur $[0; 5]$
$f \searrow$ sur $[\alpha\,; 10]$ c'est-à-dire sur $[5\,; 10]$.

On a :

$$f(0) = -(0)^2 + 10(0) = 0$$
$$f(5) = -(5)^2 + 10(5) = -25 + 50 = 25$$
$$f(10) = -(10)^2 + 10(10) = -100 + 100 = 0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0		$\alpha = 5$		10
sens de variation de f	0	$\nearrow$	$\beta = 25$	$\searrow$	0

L'aire maximale est 25 m^2 et elle est atteinte pour $AB = 5\ m$.

On $y = 10 - 5 = 5$, le potager d'aire maximale est un carré de côté $5\ m$.

E04 Le ballon de foot

On considère un ballon immobile posé sur le sol et dans lequel on shooter. On choisit pour unité de distance le mètre et on munit le plan contenant toute la trajectoire du ballon d'un repère orthonormé dont l'axe des abscisse est au niveau du sol et est orienté dans le sens du mouvement du balon, dont l'axe des ordonnées est orienté vers le haut et dont l'origine est la position initiale du ballon : dans ce repère la trajectoire du ballon a pour équation : $y = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$.
Pour tout réel x on pose : $f(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$.

1. Déterminer le maximum de f puis indiquer ce que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice.

2. Déterminer la solution strictement positive de l'équation $f(x) = 0$ puis indiquer ce que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$
$-0{,}05x^2 + 2{,}4x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$avec $a = -0{,}05$, $b = 2{,}4$ et $c = 0$. On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2{,}4}{2 \times (-0{,}05)} = \frac{-2{,}4}{-0{,}1} = 24$$

$a = -0{,}05$, $a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $]-\infty; \alpha]$ i.e. sur $]-\infty; 24]$
$f \searrow$ sur $[\alpha; +\infty[$ i.e. sur $[\alpha; +\infty[$
$\beta = f(\alpha) = f(24) = 28{,}8$
On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\alpha = 24$		$+\infty$
Sens de variation de f		$\nearrow$	$\beta = 28{,}8$	$\searrow$	

Le maximum de f est 28,8 et il est atteint en $x = 24$.
L'altitude maximale du ballon est 28,8 m.

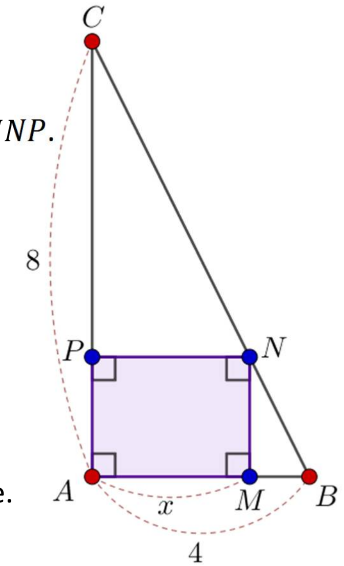
2. Avec les notation de l'exercice, on a les équivalences :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}05x^2 + 2{,}4x = 0 \Leftrightarrow x(-0{,}05x + 2{,}4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -0{,}05x + 2{,}4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 0{,}05x = 2{,}4$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2{,}4}{0{,}05} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 48$$

L'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution strictement positive le nombre 48 donc le ballon retombe sur le sol à 48 m de son point de départ.

E05 Rectangle dans un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$, $AC = 8$.
Pour tout $x \in [0;4]$ on note M le point de $[AB]$ tel que $AM = x$, N et P les points de $[BC]$ et $[AC]$ respectivement tels que $AMNP$ est un rectangle et enfin $f(x)$ l'aire du rectangle $AMNP$.



1. Justifier que $(MN) /\!/ (AC)$, en déduire que :
$$MN = 8 - 2x.$$

2. Montrer que, pour tout $x \in [0;4]$:
$$f(x) = -2x^2 + 8x$$

3. Étudier le sens de variation de f sur $[0;4]$, en déduire quelle est l'aire maximale de $AMNP$ ainsi que la valeur de x permettant de l'atteindre. Que peut-on alors dire de M ?

4. Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle $AMNP$ est-elle supérieure ou égale à 6 ?

Corrigé

1. Justifier que $(MN) /\!/ (AC)$, en déduire que : $MN = 8 - 2x$.

On sait que $(MN) \perp (AB)$ et $(AC) \perp (AC)$.
On utilise : « si deux droites sont perpendiculaire à une même troisième, alors elles sont parallèles ».
On en déduit que $(MN) /\!/ (AC)$.
On sait que : B, M, A sont alignés, B, N, C sont alignés et $(MN) /\!/ (AC)$, donc d'après le théorème de Thalès on en déduit que :
$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$$
D'où :
$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}$$
$$\frac{4-x}{4} = \frac{MN}{8}$$
$$\frac{4-x}{4} \times 8 = MN$$
$$MN = 8 \times \frac{4-x}{4} = 2(4-x) = 8 - 2x$$

2. Montrer que, pour tout $x \in [0;4]$: $f(x) = -2x^2 + 8x$.

$AMNP$ est un rectangle donc : $\mathcal{A}_{AMNP} = AM \times AP$.
Or, $AM = x$ et $AP = AC - AP = AC - MN = 8 - x$.
Donc : $\mathcal{A}_{AMNP} = x \times (8 - 2x) = 8x - 2x^2 = -2x^2 + 8x$.
Comme $f(x) = \mathcal{A}_{AMNP}$ on a bien : $\forall x \in [0;4]$, $f(x) = -2x^2 + 8x$.

3. • sens de variation de f sur $[0;4]$

$-2x^2 + 8x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2, b = 8$ et $c = 0$.
On a :
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$
$$\beta = f(\alpha) = -2(2)^2 + 8(2) = -2 \times 4 + 16 = -8 + 16 = 8$$
$a = -2, a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $[0;\alpha]$ i.e. sur $[0;2]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha;4]$ i.e. sur $[2;4]$.
On a :
$$f(0) - 2(0)^2 + 8(0) = 0$$
$$f(4) = -2(4)^2 + 8(4) = -2 \times 16 + 32 = -32 + 32 = 0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0		$\alpha = 2$		4
Sens de variation de f	0	$\nearrow$	$\beta = 8$	$\searrow$	0

• maximum de f sur $[0;4]$
Le tableau de variation montre que le maximum de f sur $[0;4]$ est 8 et qu'il est atteint pour $x = 2$.

• aire maximale de $AMNP$
Comme $f(x)$ est l'aire du rectangle $AMNP$, on en déduit que :
l'aire maximale du rectangle $AMNP$ est 8, atteinte pour $x = 2$.
Pour cette valeur de x, on a :

$$AM = 2 = \frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{2} \times AB$$

et comme $M \in [AB]$, on en déduit que M est le milieu de $[AB]$.
Autrement dit **l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale lorsque M est le milieu de $[AB]$**.

4. Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle $AMNP$ est-elle supérieure ou égale à 6 ?

Il s'agit de résoudre dans $[0;4]$ l'inéquation $f(x) \geqslant 6$:

$$-2x^2 + 8x \geqslant 6 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 6 \geqslant 0$$

$-2x^2 + 8x - 6$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 8$ et $c = -6$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-2)(-6) = 64 - 48 = 16$.
$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{16}}{2(-2)} = \frac{-8 - 4}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{16}}{2(-2)} = \frac{-8 + 4}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	0		1		3		4
Signe de $-2x^2 + 8x - 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On souhaite que : $-2x^2 + 8x - 6 \geqslant 0$: le tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions l'intervalle $[1;3]$.

L'aire de $AMNP$ est supérieure ou égale à 6 pour $x \in [1;3]$.

F parabole

E01 On munit le plan d'un repère orthonormé.

La parabole $\mathcal{P}$ représentative de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ admet pour sommet $S(4\,;1)$ et passe par $A(6\,;\,-3)$.

1. **Déterminer la forme canonique de $f(x)$.**
2. **En déduire que, pour tout réel x, on a : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.**
3. **Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses.**

Corrigé

1. **forme canonique de $f(x)$**

Le sommet S a pour coordonnées $x_S = 4$ et $y_S = 1$.
Or $x_S = \alpha$ et $y_S = \beta$ (cours) donc : $\alpha = 4$ et $\beta = 1$.
Par ailleurs, la forme canonique s'écrit : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ (cours).
Donc, pour tout réel x : $f(x) = a(x-4)^2 + 1$.
Or, on sait que $A(6\,;\,-3)$ appartient à la parabole représentative de f donc $f(6) = -3$, ce qui s'écrit :

$$a(6-4)^2 + 1 = -3 \Leftrightarrow a \times (2)^2 + 1 = -3 \Leftrightarrow a \times 4 + 1 = -3$$
$$\Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow a = -1$$

Pour tout réel x, on a : $f(x) = -(x-4)^2 + 1$ (forme canonique).

2. **Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$**

Développons le membre de gauche de l'égalité à démontrer :

$$\begin{aligned} &f(x)\\ &= -(x-4)^2 + 1\\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 1\\ &= -x^2 + 8x - 16 + 1\\ &= -x^2 + 8x - 15 \end{aligned}$$

On obtient finalement le membre de droite de l'égalité à démontrer.

On a donc bien, pour tout réel x : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.

3. **$\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points : abscisses de ces points**

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$:
$-x^2 + 8x - 15 = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -1$, $b = 8$ et $c = -15$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-15) = 64 - 60 = 4$$

$\Delta > 0$ $-x^2 + 8x - 15$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8-2}{-2} = \frac{-10}{-2} = +5$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8+2}{-2} = \frac{-6}{-2} = +3$$

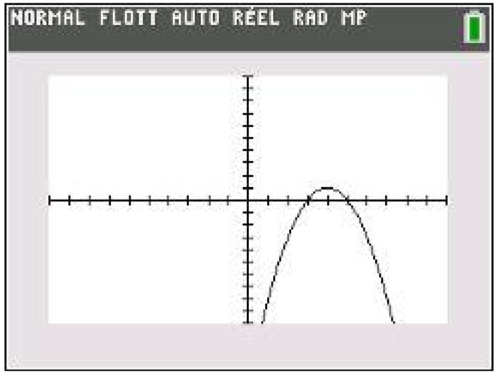
Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives : 3 et 5.

Autre méthode

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. On a les équivalences

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1^2 - (x-4)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow [1 + (x-4)][1 - (x-4)] = 0 \Leftrightarrow (1 + x - 4)(1 - x + 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(-x+5) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \;\; ou \;\; -x + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \;\; ou \;\; -x = -5 \Leftrightarrow x = 3 \;\; ou \;\; x = 5$$

Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives : **3** et **5**.



E02 On munit le plan d'un repère orthogonal.
La parabole représentative de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses en $E(3\,;0)$ et $F(7\,;0)$, de plus $A(1\,;\,-6)$ appartient à cette parabole : déterminer a, b et c.

Corrigé

On va d'abord chercher une forme factorisée de $f(x)$, en déduire la forme développée qui permettra l'identification des coefficients a,b et c.

Notons $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f dans le repère orthogonal : $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points, E et F, d'abscisses respectives 3 et 7, autrement dit l'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions : 3 et 7, par conséquent pour tout réel x : $f(x) = a(x-3)(x-7)$.
Or, $f(1) = -6$ donc : $a(1-3)(1-7) = -6$, puis : $a(-2)(-6) = -6$ ou encore : $a = \dfrac{-6}{(-2)\times(-6)}$, soit finalement : $a = -\dfrac{1}{2}$.
On a donc :

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x-7) = -\frac{1}{2}(x^2 - 7x - 3x + 21)$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 10x + 21) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{10}{2}x - \frac{21}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2}$$

On a : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 5x - \dfrac{21}{2}$, qui est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 5$ et $c = -\dfrac{21}{2}$.
Finalement :

$$\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}, b = 5 \text{ et } c = -\frac{21}{2}}$$