

Exercice 1 [1 point]

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^2 - n + 10$.

Exercice 2 [6 points]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 56$.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x^3 + 9x^2 - 15x + 56 = (x - 8)(ax^2 + bx + c)$$

2. En déduire que $f(x)$ est positif ou nul sur $[0; 8]$.

3. On considère un solide de l'espace qui, pour $x \in [0; 8]$ a pour volume $f(x)$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; 8]$.

Quel est le volume maximal de ce solide, pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 3 [6 points]

Pour tout réel x , on pose :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan et on admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Etudier le signe de $f'(x)$, en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 admet pour équation : $y = -x + 5$.

4. Etudier la position relative de T et $\mathcal{C}$.

Exercice 4 [5 points]

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{5x + 1}$$

On admet que f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

(u_n) est la suite telle que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n + 3}{5n + 1} = f(n)$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$: que peut-on en déduire pour le sens de variation de la suite (u_n) ?

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n > 0,4$.

4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que : $0,4 < u_p < 0,401$.

Exercice 5 [2 points]

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x : $f(x) = (x - 3)^2 g(x) + 1$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.

Déterminer l'équation réduite de T .

BONUS [1 point]

Sachant que x et y sont deux réels tels que $x + y = 1$, déterminer le maximum de $x^3 y$ et préciser pour quelles valeurs de x et y il est atteint.

Corrigé Thiaude

Exercice 1

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^2 - n + 10$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) + 10 = 2(n^2 + 2n + 1) - n - 1 + 10 = 2n^2 + 3n + 11$$

Donc :

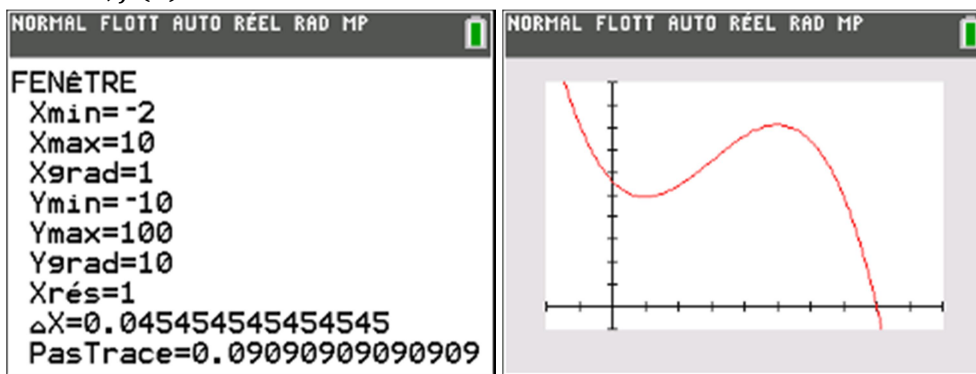
$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 3n + 11 - (2n^2 - n + 10) = 2n^2 + 3n + 11 - 2n^2 + n - 10 = 4n + 1$$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $4n + 1 > 0$, par conséquent : $u_{n+1} - u_n > 0$.

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 56$



1. Déterminer a, b et c tels que, $\forall x \in \mathbb{R} : -x^3 + 9x^2 - 15x + 56 = (x - 8)(ax^2 + bx + c)$.

En développant $(x - 8)(ax^2 + bx + c)$:

- le terme de plus haut degré est ax^3 et le terme constant est $-8c$, or ces termes doivent être respectivement $-x^3$ et 56 donc $a = -1$ et $-8c = 56$ donc $c = -7$
- le terme en x est $(c - 8b)x$ qui doit être égal à $-15x$, donc : $-7 - 8b = -15$,
puis : $8b = -7 + 15 = 8$, et enfin : $b = 1$

Finalement : $a = -1, b = 1$ et $c = -7$.

Vérification : $(x - 8)(-x^2 + x - 7) = -x^3 + x^2 - 7x + 8x^2 - 8x + 56 = -x^3 + 9x^2 - 15x + 56 \checkmark$

2. En déduire que $f(x)$ est positif ou nul sur $[0; 8]$.

$$f(x) = (x - 8)(-x^2 + x - 7)$$

- $x \in [0; 8] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq x - 8 \leq 0 \Rightarrow x - 8 \leq 0$: le premier facteur est négatif
- le discriminant de $-x^2 + x - 7$ est : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(-7) = 1 - 28 = -27$,
il est strictement négatif donc : $-x^2 + x - 7$ est « toujours du signe de a et ne s'annule pas »,
donc est toujours strictement négative, en particulier sur $[0; 8]$: le deuxième facteur est négatif.

Résumons : sur $[0; 8]$ on a : $x - 8 \leq 0$ et $-x^2 + x - 7 \leq 0$ donc : $(x - 8)(-x^2 + x - 7) \geq 0$.

Conclusion : $f(x)$ est bien positif ou nul sur $[0; 8]$.

3. On considère un solide de l'espace qui, pour $x \in [0; 8]$ a pour volume $f(x)$.

a. Calcul de $f'(x)$

$$f'(x) = -3x^2 + 9 \times 2x - 15$$

$$\forall x \in [0; 8], f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

b. Tableau de variation de f sur $[0; 8]$

$-3x^2 + 18x - 15$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$, $b = 18$ et $c = -15$,

de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4(-3)(-15) = 144$

$\Delta > 0$ donc $-3x^2 + 18x - 15$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 - \sqrt{144}}{2(-3)} = \frac{-18 - 12}{-6} = \frac{-30}{-6} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-18 + 12}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

tableau de variation de f sur $[0; 8]$:

x	0	1	5	8	
Signe de $f'(x)$	—	0	+	0	—
Sens de variation de f	56	↘ 49	↗ 81	↘ 0	

$$f(0) = -(0)^3 + 9(0)^2 - 15(0) + 56 = 56$$

$$f(1) = -(1)^3 + 9(1)^2 - 15(1) + 56 = -1 + 9 - 15 + 56 = 49$$

$$f(5) = -(5)^3 + 9(5)^2 - 15(5) + 56 = 81$$

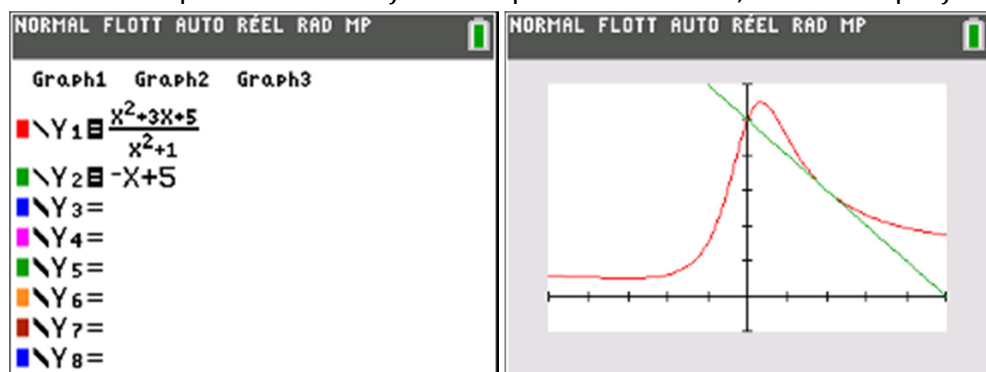
$$f(8) = 0$$

On déduit de ce tableau de variation que : **le volume maximal est 81**, atteint « pour $x = 5$ ».

Exercice 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$$

$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans repère orthonormé, on admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$



1. Calcul de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 3x + 5)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x + 3x^2 + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

2. Signe de $f'(x)$, variations de f

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur $-3x^2 - 8x + 3$.

$-3x^2 - 8x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$, $b = -8$ et $c = 3$, de discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(-3)(3) = 64 + 36 = 100$$

$\Delta > 0$ donc $-3x^2 - 8x + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+8 - \sqrt{100}}{2(-3)} = \frac{8 - 10}{-6} = \frac{-2}{-6} = +\frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+8 + \sqrt{100}}{2(-3)} = \frac{8 + 10}{-6} = \frac{18}{-6} = -\frac{6 \times 3}{6 \times 1} = -3$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On en déduit :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$
Sens de variation de f		$\frac{1}{2}$		$\frac{11}{2}$	

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 + 3(-3) + 5}{(-3)^2 + 1} = \frac{9 - 9 + 5}{9 + 1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 5}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{9} + 1 + 5}{\frac{1}{9} + 1} = \frac{\frac{1}{9} + 6}{\frac{1}{9} + 1} = \frac{\frac{55}{9}}{\frac{10}{9}} = \frac{55}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{55}{10} = \frac{11}{2}$$

3. T tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2, montrer que T admet pour équation : $y = -x + 5$.

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 admet pour équation : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

$$f'(2) = \frac{-3(2)^2 - 8(2) + 3}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-3 \times 4 - 16 + 3}{5^2} = \frac{-25}{25} = -1$$

$$f(2) = \frac{(2)^2 + 3(2) + 5}{(2)^2 + 1} = \frac{4 + 6 + 5}{4 + 1} = \frac{15}{5} = 3$$

On obtient : $y = -1(x - 2) + 3 \Leftrightarrow y = -x + 2 + 3 \Leftrightarrow y = -x + 5$

La tangente T admet bien pour équation : $y = -x + 5$.

4. Position relative de T et $\mathcal{C}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = f(x) - (-x + 5)$: il s'agit d'étudier le signe de $h(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1} + x - 5 = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1} + \frac{(x - 5)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 3x + 5 + (x - 5)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 5 + x^3 + x - 5x^2 - 5}{x^2 + 1} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 - 4x + 4)}{x^2 + 1} = \frac{x(x - 2)^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Dressons le tableau de signes de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$(x - 2)^2$	$+$	$+$	$\emptyset$	$+$
$h(x)$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$+$

$$f(0) = \frac{0^2 + 3(0) + 5}{0^2 + 1} = 5 \text{ et } f(2) = \frac{2^2 + 3(2) + 5}{2^2 + 1} = \frac{4 + 6 + 5}{4 + 1} = \frac{15}{5} = 3$$

- sur $] - \infty; 0[: \mathcal{C}$ est (strictement) **en dessous de T**
- sur $]0; 2[$ et sur $]2; +\infty[: \mathcal{C}$ est (strictement) **au-dessus de T**
- $\mathcal{C}$ et T ont pour points en commun : $E(0; 5)$ et $F(2; 3)$

Exercice 4

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \frac{2x+3}{5x+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{5n+1} = f(n)$$

1. Calcul de $f'(x)$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(5x+1) - 5(2x+3)}{(5x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{10x+2-10x-15}{(5x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-13}{(5x+1)^2}$$

2. Déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[: \text{quel peut-on en déduire pour le sens de variation de la suite } (u_n) ?$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : -13 , on en déduit que :

$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) < 0$ donc **f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$**
par conséquent la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n > 0,4$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n - 0,4 &= \frac{2n+3}{5n+1} - 0,4 = \frac{2n+3}{5n+1} - \frac{2}{5} = \frac{(2n+3)5}{(5n+1)5} - \frac{2(5n+1)}{5(5n+1)} = \frac{10n+15}{5(5n+1)} - \frac{10n+2}{5(5n+1)} \\ &= \frac{10n+15-(10n+2)}{5(5n+1)} = \frac{13}{5(5n+1)} \end{aligned}$$

Or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$, $5n \geq 0$, $5n+1 > 0$, $5(5n+1) > 0$, $13 > 0$ donc : $u_n - 0,4 > 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 0,4 > 0$ autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0,4$.

4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que : $0,4 < u_p < 0,401$.

D'après la question précédente l'inégalité $0,4 < u_p$ est toujours réalisée donc il s'agit simplement de déterminer p tel que : $u_p < 0,401$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{2n+3}{5n+1} < 0,401 &\Leftrightarrow 2n+3 < 0,401(5n+1) \quad (5n+1 > 0) \\ &\Leftrightarrow 2n+3 < 2,005n+0,401 \Leftrightarrow 3-0,401 < 2,005n-2n \\ &\Leftrightarrow 2,599 < 0,005n \Leftrightarrow \frac{2,599}{0,005} < n \quad (0,005 > 0) \Leftrightarrow n > 519,8 \end{aligned}$$

Or, le plus petit entier naturel strictement plus grand que 519,8 est 520 donc **$p = 520$** .

Vérification :

$$\begin{aligned} u_{519} &= f(519) \approx 0,401\,002 > 0,401 \\ u_{520} &= f(520) \approx 0,400\,999 < 0,401 \end{aligned}$$

Exercice 5

g dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - 3)^2 g(x) + 1$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $\mathcal{C}$ courbe représentative de f , T tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.
Déterminer l'équation réduite de T .

La tangente T admet pour équation : $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$.

Or,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2(x - 3) \times 1 \times g(x) + g'(x) \times (x - 3)^2 + 0 \\f'(x) &= 2(x - 3)g(x) + g'(x)(x - 3)^2\end{aligned}$$

donc :

$$f'(3) = 2(3 - 3)g(3) + g'(3)(3 - 3)^2 = 0 \times g(3) + g'(3) \times 0^2 = 0$$

D'autre part :

$$f(3) = (3 - 3)^2 g(3) + 1 = 0^2 g(3) + 1 = 1$$

on obtient :

$$\begin{aligned}y &= 0(x - 3) + 1 \\y &= 1\end{aligned}$$

La tangente T admet pour équation réduite : $y = 1$.

BONUS

Sachant que x et y sont deux réels tels que $x + y = 1$, déterminer la valeur maximale de $x^3 y$ et indiquer pour quel valeur de x et y est atteinte.

$x + y = 1$ donc $y = 1 - x$, par conséquent ; $x^3 y = x^3(1 - x)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3(1 - x)$.

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$

$$f'(x) = 3x^2(1 - x) + (-1)x^3$$

$$f'(x) = 3x^2(1 - x) - x^3$$

$$f'(x) = x^2[3(1 - x) - x]$$

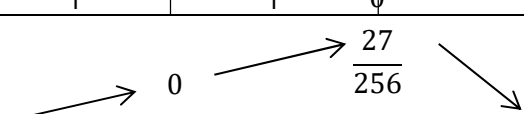
$$f'(x) = x^2(3 - 3x - x)$$

$$f'(x) = x^2(-4x + 3)$$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et un carré est toujours positif ou nul

$$-4x + 3 = 0 \Leftrightarrow -4x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
x^2	+	+	+	+
$-4x + 3$	+	+	0	-
$f'(x)$	+	+	0	-
Sens de variation de f				

$$f(0) = 0^3(1 - 0) = 0(1 - 0) = 0 \text{ et } f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{256}$$

$$\text{Si } x = \frac{3}{4} \text{ alors } y = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Le maximum cherché est $\frac{27}{256}$, atteint pour : $x = \frac{3}{4}$ **et** $y = \frac{1}{4}$.