

Durée : 1h40 Calculatrice INTERDITE !

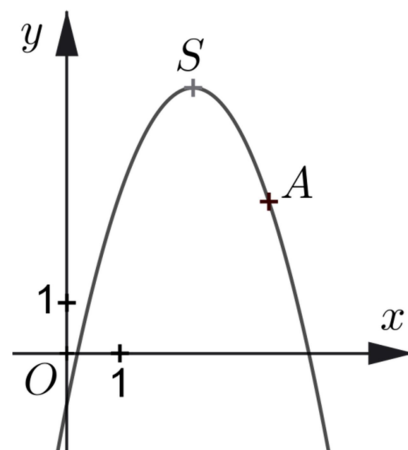
Exercice 1 [5 pts]

On a représenté ci-contre dans un repère orthonormé du plan la parabole représentative $\mathcal{P}$ d'une fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que :

– en notant S le sommet de la parabole $\mathcal{P}$, on a :

$$S\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$$

– le point $A(4; 3)$ appartient à la parabole $\mathcal{P}$.



1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

En déduire que, pour tout réel x , on a : $f(x) = -x^2 + 5x - 1$.

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. On considère $E(3; 6)$ et $F(-1; 2)$.

a. Déterminer l'équation réduite de la droite (EF) .

b. La droite (EF) a-t-elle un(des) point(s) en commun avec $\mathcal{P}$?

Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de ce(s) point(s).

Exercice 2 [4 pts]

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2x - 1)^2 + x^2 = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{-x^2 + 4x + 5}{x - 4} \leq 0$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

Exercice 3 [2 pts]

Calculer les nombres E et F en rappelant les formules utilisées.

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

Exercice 4 [5 pts]

Sur la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f dans un repère orthogonal on a placé deux points A et B à coordonnées entières et on a tracé :

- la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ en A , droite horizontale
- la tangente T_B à $\mathcal{C}_f$ en B .

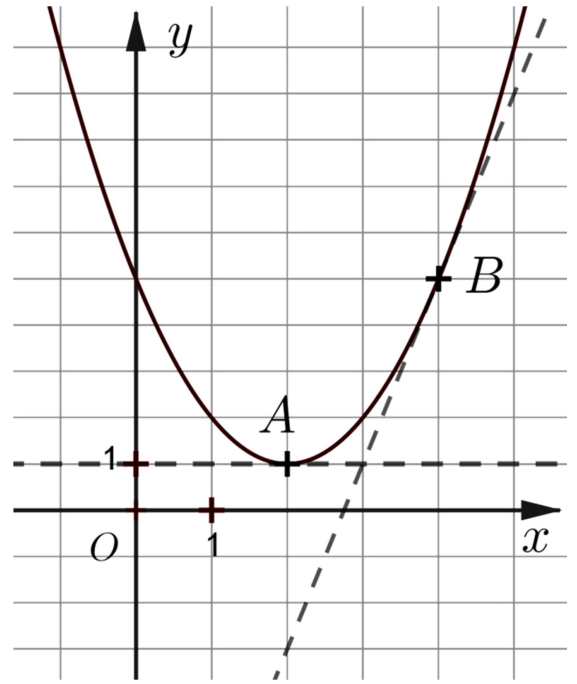
1. Par lecture graphique déterminer :

- $f(2)$ et $f'(2)$.
- $f(4)$ et $f'(4)$.

2. A présent on admet que, pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

- Déterminer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$, $h \neq 0$. En déduire $f'(1)$ puis l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- Existe-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère ?
Si oui, préciser les coordonnées du ou des point(s) correspondant(s) de $\mathcal{C}_f$.



Exercice 5 [4 pts]

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on a tracé le cercle trigonométrique.

On a placé sur ce cercle :

- le point A image du réel : $\frac{\pi}{12}$
- le point B image du réel : $\frac{3\pi}{4}$
- le point C image du réel : $-\frac{7\pi}{12}$

1. On admet que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

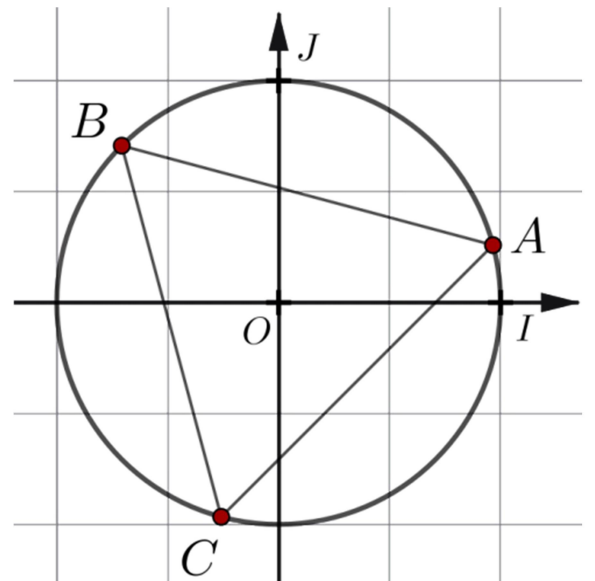
Vérifier que : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. Donner sans justification $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

3. Exprimer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ en fonction de $\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$, en déduire les coordonnées du point C en fonction de $\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$.

4. Vérifier que : $AB = \sqrt{3}$.

5. Donner sans justification la nature du triangle ABC .



Corrigé thiaude

Exercice 1

$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $S(\frac{5}{2}; \frac{21}{4})$ et $A(4; 3) \in \mathcal{P}$.

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

La forme canonique de $f(x)$ s'écrit : $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $S(\alpha; \beta)$, or $S(\frac{5}{2}; \frac{21}{4})$ donc $\alpha = \frac{5}{2}$ et $\beta = \frac{21}{4}$,

d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$ (*), or $A(4; 3) \in \mathcal{P}$, donc $f(4) = 3$, en remplaçant dans (*) :

$$3 = a\left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{21}{4} \Leftrightarrow 3 = a \times \frac{9}{4} + \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{12}{4} - \frac{21}{4} = a \times \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} = a \times \frac{9}{4} \Leftrightarrow a = -1$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$$

Développons :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(x^2 - 2(x)\left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + \frac{21}{4} = -\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{21}{4} = -x^2 + 5x - \frac{25}{4} + \frac{21}{4} \\ &= -x^2 + 5x - \frac{4}{4} = -x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 1$.

2. Dresser le tableau de variation de f .

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 1$, $\alpha = \frac{5}{2}$ et $\beta = \frac{21}{4}$.

$-x^2 + 5x - 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 5$ et $c = -1$

$a = -1$, $a < 0$ donc :

f est $\nearrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ c'est-à-dire sur $] -\infty; \frac{5}{2}]$ et f est $\searrow$ sur $[\alpha; +\infty[$ c'est-à-dire sur $[\frac{5}{2}; +\infty[$.

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{5}{2}$	$+\infty$
Sens de variation de f		$\nearrow \quad \beta = \frac{21}{4} \quad \searrow$	

3. $E(3; 6), F(-1; 2)$

a. Équation réduite de (EF)

Une équation de (EF) est : $y = a_{(EF)}(x - x_E) + y_E$, or on a :

$$a_{(EF)} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{2 - 6}{-1 - 3} = \frac{-4}{-4} = 1$$

et comme $x_E = 3$ et $y_E = 6$ on obtient :

$$\begin{aligned} y &= 1(x - 3) + 6 \\ y &= x - 3 + 6 \\ y &= x + 3 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation réduite de (EF) est $y = x + 3$.

Vérification : $x_F + 3 = -1 + 3 = 2 = y_F$ et $x_E + 3 = 3 + 3 = 6 = y_E$

b. Intersection de (EF) et $\mathcal{P}$

Il s'agit de résoudre l'équation : $f(x) = x + 3$, qui s'écrit aussi : $-x^2 + 5x - 1 = x + 3$.

Or, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x - 1 &= x + 3 \Leftrightarrow 0 = x + 3 + x^2 - 5x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x)^2 - 2(x)(2) + (2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Si $x = 2$, en utilisant l'équation réduite de (EF) on obtient : $y = x + 3 = 2 + 3 = 5$.

Conclusion : (EF) et $\mathcal{P}$ ont $I(2; 5)$ comme unique point en commun.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2x - 1)^2 + x^2 = 1$.

$$(2x - 1)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2(2x)(1) + (1)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{5}$$

L'équation de départ admet pour solutions : 0 et $\frac{4}{5}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{-x^2 + 4x + 5}{x - 4} \leq 0$$

• étude de $-x^2 + 4x + 5$

$-x^2 + 4x + 5$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 4$ et $c = 5$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-1)(5) = 16 + 20 = 36$$

$\Delta > 0$ donc $-x^2 + 4x + 5$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2(-1)} = \frac{-4 - 6}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2(-1)} = \frac{-4 + 6}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

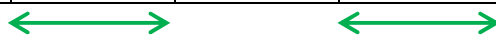
• étude de $x - 4$

$$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

• tableau de signes

x	$-\infty$	-1	4	5	$+\infty$
$-x^2 + 4x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$-$
$x - 4$	$-$		0	$+$	$+$
$\frac{-x^2 + 4x + 5}{x - 4}$	$+$	0	$-$	0	$-$



La dernière ligne permet de donner l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ :

$$S = [-1; 4[\cup [5; +\infty[$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

L'équation $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ s'écrit aussi $(x^2)^2 - 29x^2 + 100 = 0$.

En posant $X = x^2$, on obtient : $X^2 - 29X + 100 = 0$.

$X^2 - 29X + 100$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = -29$ et $c = 100$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-29)^2 - 4(1)(100) = 841 - 400 = 441$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{441} = \sqrt{20^2 + 2(20)(1) + 1^2} = \sqrt{21^2} = 21$$

$X^2 - 29X + 100$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+29 - 21}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4 \text{ et } X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+29 + 21}{2(1)} = \frac{50}{2} = 25$$

On a donc : $X = 4$ ou $X = 25$, or $X = x^2$ donc : $x^2 = 4$ ou $x^2 = 25$, c'est-à-dire : $x = -2$ ou $x = 2$, ou $x = -5$ ou $x = 5$.

L'équation $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ admet pour solutions : -5 , -2 , 2 et 5 .

Exercice 3

$$\bullet E = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$\frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi, \text{ donc : } \frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$$

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$E = 0$$

Formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi + x) = -\cos(x)$

$$\bullet F = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$\frac{6\pi}{7} = \pi - \frac{\pi}{7}, \frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7} \text{ et } \frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7}$$

Formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$F = 0 + 0 + 0$$

$$F = 0$$

Exercice 4 [5 pts]

1. Par lecture graphique :

a. $f(2)$ et $f'(2)$

$$f(2) = f(x_A) = y_A = 1$$

$$f'(2) = 0 \text{ (tangente horizontale)}$$

Résumons : $f(2) = 1$ et $f'(2) = 0$.

b. $f(4)$ et $f'(4)$

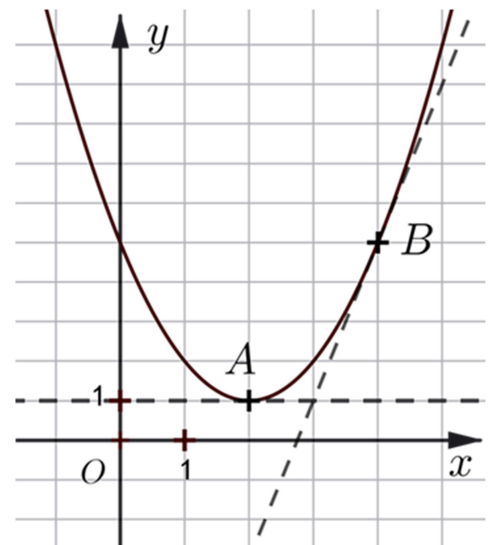
Notons $C(5; 9) \in T_B$.

$$f(4) = f(x_B) = y_B = 5$$

$$f'(4) = f'(x_B) = \begin{array}{l} \text{coeff. directeur} \\ \text{de la tangente} \\ \text{à } C_f \text{ en } B \end{array} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

$$= \frac{9 - 5}{5 - 4} = \frac{4}{1} = 4$$

Résumons : $f(4) = 5$ et $f'(4) = 4$.



2. On admet que, pour tout réel x : $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

a. Déterminer pour $h \neq 0$ le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$.

$$f(1 + h) = (1 + h)^2 - 4(1 + h) + 5 = 1 + 2h + h^2 - 4 - 4h + 5 = h^2 - 2h + 2$$

$$f(1) = 1^2 - 4(1) + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$$

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 - 2h + 2 - 2}{h} = \frac{h^2 - 2h}{h} = \frac{h(h - 2)}{h} = h - 2$$

Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$ est :

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = h - 2$$

b. En déduire $f'(1)$ puis l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

$$f'(1) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 2) = -2$$

$$f'(1) = -2$$

Vérification $f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(1) = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2$, on retrouve bien -2 .

c. Existe-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère ? Si oui, préciser les coordonnées du ou des point(s) correspondant(s) de $\mathcal{C}_f$.

La tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse x_0 admet pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, c'est-à-dire : $y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$, son ordonnée à l'origine est : $-f'(x_0)x_0 + f(x_0)$.

Or, une droite (non verticale) passe par l'origine du repère si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle, il s'agit donc de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-f'(x)x + f(x) = 0$:

$$-(2x - 4)x + x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \text{ ou } x = \sqrt{5}$$

On a :

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{5}) + 5 = 5 - 4\sqrt{5} + 5 = 10 - 4\sqrt{5}$$

$$f(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^2 - 4(-\sqrt{5}) + 5 = +5 + 4\sqrt{5} + 5 = 10 + 4\sqrt{5}$$

Il existe deux points de $\mathcal{P}$ en lesquels la tangente passe par l'origine du repère :

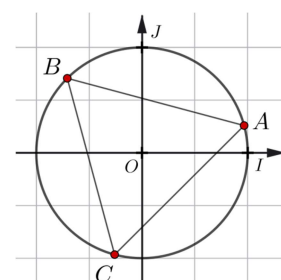
$$E(-\sqrt{5}; 10 + 4\sqrt{5}) \text{ et } F(\sqrt{5}; 10 - 4\sqrt{5}).$$

Exercice 5

A image du réel : $\frac{\pi}{12}$

B image du réel : $\frac{3\pi}{4}$

C image du réel : $-\frac{7\pi}{12}$



1. On admet que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, vérifier que : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

On a d'une part :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{(\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{4^2} = \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16}$$

et d'autre part, pour tout réel x : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, autrement dit : $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

donc pour $x = \frac{\pi}{12}$, on obtient :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16} = \frac{16}{16} - \frac{(\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{16} \\ = \frac{16 - (6 + 2\sqrt{12} + 2)}{16} = \frac{16 - 6 - 2\sqrt{12} - 2}{16} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16}$$

On constate que :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

Or, deux nombres dont les carrés sont égaux sont égaux ou opposés donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ ou } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} < 0$ donc par élimination, on obtient : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. Donner sans justification $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Exprimer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ en fonction de $\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$, en déduire les coordonnées du point C en fonction de $\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$.

Formules

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

On a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{6\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{-(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Résumons :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Le point C est l'image sur le cercle trigonométrique du réel $\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ donc : $C\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right); \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.

Or :

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Conclusion :

$$C\left(\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

4. Vérifier que : $AB = \sqrt{3}$.

$$A\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \text{ et } B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On est dans un repère orthonormé donc on peut appliquer la formule de la distance :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

On a :

$$\begin{aligned}& (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 \\&= \left(\frac{-2\sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 \\&= \left(\frac{-3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 \\&= \frac{9 \times 2 + 6\sqrt{2}\sqrt{6} + 6}{16} + \frac{9 \times 2 - 6\sqrt{2}\sqrt{6} + 6}{16} \\&= \frac{18 + 6\sqrt{12} + 6 + 18 - 6\sqrt{12} + 6}{16} \\&= \frac{48}{16} \\&= 3\end{aligned}$$

donc : $AB = \sqrt{3}$.

5. Donner sans justification la nature du triangle ABC .

On montrerait de même que $BC = \sqrt{3}$ et $CA = \sqrt{3}$. On a : $AB = BC = CA$ donc ABC est équilatéral.