Maths 1ère Spé Maths **DS1 Samedi 4 octobre 2025**

Durée : 1h30 **Calculatrice <u>INTERDITE</u> !**

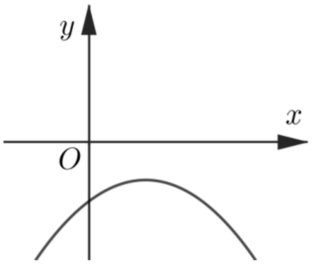
Le sujet est à rendre avec la copie.

NOM :
Professeur :

<u>Exercice 1 [4,5]</u> Q.C.M.

On donne les paraboles représentatives dans un repère orthogonal de fonctions $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ définies sur $\mathbb{R}$, on note Δ le discriminant.

Cocher les affirmations exactes.

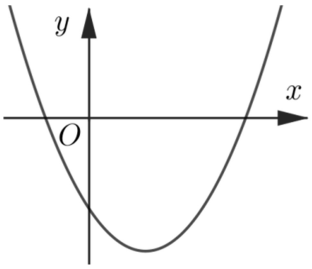


☐ $a < 0$ ☐ $a > 0$

☐ $\Delta < 0$ ☐ $\Delta > 0$

☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$ ☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$

☐ $f(x)$ change de signe

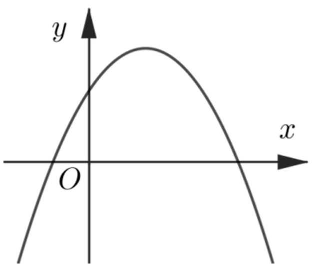


☐ $a < 0$ ☐ $a > 0$

☐ $\Delta < 0$ ☐ $\Delta > 0$

☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$ ☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$

☐ $f(x)$ change de signe



☐ $a < 0$ ☐ $a > 0$

☐ $\Delta < 0$ ☐ $\Delta > 0$

☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$ ☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) > 0$

☐ $f(x)$ change de signe

<u>Exercice 2</u> [4 points]

Pour tout réel x on pose :

$A(x) = 4x^2 - 12x + 9 + (5x - 1)(2x - 3)$ et $B(x) = (x + 3)^2 + 4x$.

Factoriser $A(x)$ et $B(x)$.

<u>Exercice 3</u> [6,5 points]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 6x - 4$.

1. Donner la forme canonique de $f(x)$.

2. Calculer $f\left(3 - \sqrt{7}\right)$, donner la forme la plus simple possible.

3. Résoudre l'équation $f(x) = -4$.

4. Calculer les racines de f.

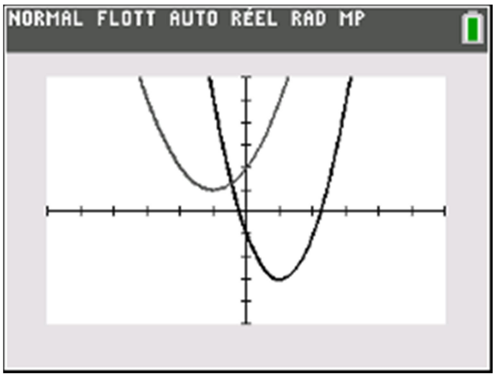
5. Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et la valeur de la variable pour laquelle il est atteint.

6. **<u>Bonus</u>**
Résoudre l'inéquation : $6x \leqslant x^2 + 4$.

<u>Exercice 4</u> [3 points]
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 2x + 2$$

On note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f et $\mathcal{P}'$ celle de g dans un même repère orthogonal.
En utilisant sa calculatrice graphique, un élève obtient :

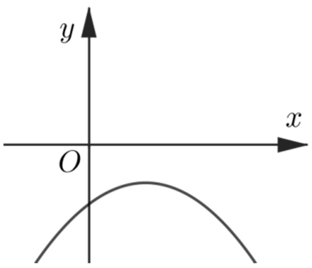


Les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ se coupent en deux points, un seul étant visible sur la copie d'écran précédente.
Déterminer les valeurs exactes des coordonnées de ces deux points.

<u>Exercice 5</u> [2 points]
La parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en $E(-4; 0)$ et $F(2; 0)$ et on précise de plus que $A(3\,; \frac{7}{4})$ appartient à $\mathcal{P}$.
Déterminer les coordonnées du sommet de cette parabole.

Corrigé thiaude

Exercice 1

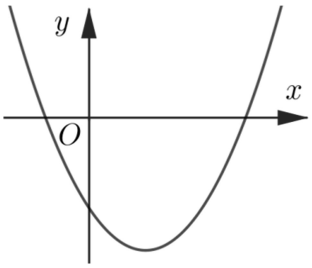


☒ $a < 0$ ☐ $a > 0$

☒ $\Delta < 0$ ☐ $\Delta > 0$

☒ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$ ☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$

☐ $f(x)$ change de signe

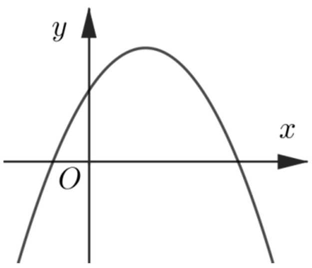


☐ $a < 0$ ☒ $a > 0$

☐ $\Delta < 0$ ☒ $\Delta > 0$

☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$ ☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$

☒ $f(x)$ change de signe



☒ $a < 0$ ☐ $a > 0$

☐ $\Delta < 0$ ☒ $\Delta > 0$

☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$ ☐ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) < 0$

☒ $f(x)$ change de signe

Exercice 2

• **factorisation de $A(x)$**

$A(x)$
$= 4x^2 - 12x + 9 + (5x - 1)(2x - 3)$
$= (2x)^2 - 2(2x)(3) + (3)^2 + (5x - 1)(2x - 3)$
$= (2x - 3)^2 + (5x - 1)(2x - 3)$
$= (2x - 3)[(2x - 3) + (5x - 1)]$
$= (2x - 3)(2x - 3 + 5x - 1)$
$= (2x - 3)(7x - 4)$

• **factorisation de $B(x)$**

$B(x)$
$= (x + 3)^2 + 4x$
$= x^2 + 6x + 9 + 4x$
$= x^2 + 10x + 9$
$= (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2 - 25 + 9$
$= (x + 5)^2 - 16$
$= (x + 5)^2 - (4)^2$
$= (x + 5 + 4)(x + 5 - 4)$
$= (x + 9)(x + 1)$

Conclusion : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{A(x) = (2x - 3)(7x + 4)}$ et $\boldsymbol{B(x) = (x + 9)(x + 1)}$.

Exercice 3

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = -x^2 + 6x - 4}$.

1. **Donner la forme canonique de $f(x)$.**

$-x^2 + 6x - 4$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = -4$.

La forme canonique s'écrit $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = +\frac{6}{2} = 3$$

$$\beta = f(\alpha) = f(3) = -(3)^2 + 6(3) - 4 = -9 + 18 - 4 = 9 - 4 = 5$$

Conclusion : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = -(x - 3)^2 + 5} \quad (\boldsymbol{forme\ canonique})$

2. **Calculer $f(3-\sqrt{7})$, donner la forme la plus simple possible.**

On a montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-3)^2 + 5$, donc :

$$f(3-\sqrt{7}) = -\left(3-\sqrt{7}-3\right)^2 + 5 = -\left(-\sqrt{7}\right)^2 + 5 = -7+5 = -2$$

Conclusion : $\boldsymbol{f(3-\sqrt{7}) = -2}$

3. **Résoudre l'équation $f(x) = -4$.**

En utilisant la forme développée de $f(x)$, l'équation $f(x) = -4$ s'écrit :

$$-x^2+6x-4 = -4 \Leftrightarrow -x^2+6x = 0 \Leftrightarrow x(-x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou - x + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \ ou \ \ -x = -6 \Leftrightarrow x = 0 \ \ ou \ \ x = 6$$

Conclusion : **l'équation $f(x) = -4$ admet pour solutions 0 et 6.**

4. **Calculer les racines de f.**

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-4) = 36 - 16 = 20$.

Remarquons que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = \sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

$\Delta > 0$ donc $-x^2+6x-4$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-2\sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{2} = 3+\sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+2\sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{6-2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{2} = 3-\sqrt{5}$$

Conclusion : **les racines de f sont $3-\sqrt{5}$ et $3+\sqrt{5}$.**

5. **Maximum de f sur $\mathbb{R}$ et valeur de la variable pour laquelle il est atteint**

$f(x) = -x^2+6x-4$

$a = -1$, $a < 0$ donc :

$f \nearrow$ sur $]-\infty;\alpha]$ c'est-à-dire sur $]-\infty;3]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha;+\infty[$ c'est-à-dire sur $[3;+\infty[$

On en déduit que $f(x)$ admet une valeur maximale et qu'elle est atteinte en $x = 3$ (uniquement).

Or, $f(3) = f(\alpha) = \beta = 5$, donc : **$f$ admet pour maximum 5 (sur $\mathbb{R}$), atteint en 3** (uniquement).

6. **Bonus**

Résoudre l'inéquation : $6x \leqslant x^2 + 4$.

On a les équivalences : $6x \leqslant x^2+4 \Leftrightarrow 6x - x^2 - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow -x^2+6x-4 \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0$.

Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

On en déduit le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		$3-\sqrt{5}$		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est : $\boldsymbol{S = \,]-\infty; 3-\sqrt{5}] \cup [3+\sqrt{5}; +\infty[}$.

Exercice 4

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x + 2$

Déterminons les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection des deux paraboles.

Les abscisses des points d'intersection des paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

On a les équivalences :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2-4x-1 = x^2+2x+2 \Leftrightarrow 2x^2-4x-1-x^2-2x-2 = 0 \Leftrightarrow x^2-6x-3 = 0$

x^2-6x-3 est de la forme ax^2+bx+c avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = -3$, de discriminant :

$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2 - 4(1)(-3) = 36+12 = 48$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\Delta > 0$ donc x^2-6x-3 admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+6-4\sqrt{3}}{2(1)}=\frac{2(3-2\sqrt{3})}{2\times 1}=3-2\sqrt{3}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+6+4\sqrt{3}}{2(1)}=\frac{2(3+2\sqrt{3})}{2\times 1}=3+2\sqrt{3}$$

Puis :

$y_1=g(x_1)=\left(3-2\sqrt{3}\right)^2+2\left(3-2\sqrt{3}\right)+2=9-12\sqrt{3}+4\times 3+6-4\sqrt{3}+2$
$=9+12+6+2-16\sqrt{3}=29-16\sqrt{3}$

$y_2=g(x_2)=\left(3+2\sqrt{3}\right)^2+2\left(3+2\sqrt{3}\right)+2=9+12\sqrt{3}+4\times 3+6+4\sqrt{3}+2$
$=9+12+6+2+16\sqrt{3}=29+16\sqrt{3}$

Conclusion

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ se coupent en deux points de coordonnées $\left(\mathbf{3-2\sqrt{3};29-16\sqrt{3}}\right)$ et $\left(\mathbf{3+2\sqrt{3};29+16\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 5

La parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en $E(-4;0)$ et $F(2;0)$ et on précise que $A(3\,;\frac{7}{4})$ appartient $\mathcal{P}$.
Déterminons les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$.
Notons $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ la fonction dont la représenttion graphique dans le repère orthogonal considéré est la parabole $\mathcal{P}$ et S le sommet de cette parabole.
Le point E appartient à $\mathcal{P}$ donc $f(x_E)=y_E$, or $E(-4;0)$, donc $f(-4)=0$ autrement dit (-4) est une racine de f ; de même, en raisonnant sur F, on montrerait que 2 est une racine de f.
Une factorisation de $f(x)$ s'écrit donc : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a(x+4)(x-2)$.
Or, $A(3\,;\frac{7}{4})$ appartient $\mathcal{P}$ donc $f(3)=\frac{7}{4}$, puis en utilisation l'expression précédente de $f(x)$:

$$a(3+4)(3-2)=\frac{7}{4}\Leftrightarrow a\times 7\times 1=\frac{7}{4}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$$

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{4}(x+4)(x-2)$.
Développons :

$$f(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x+4x-8)=\frac{1}{4}(x^2+2x-8)=\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{4}x-\frac{8}{4}=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2$$

Avec les notations du cours :

$$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1$$
$$\beta=f(\alpha)=f(-1)=\frac{1}{4}(-1)^2+\frac{1}{2}(-1)-2=\frac{1}{4}\times 1-\frac{1}{2}-2=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}-\frac{8}{4}=-\frac{9}{4}$$

Or, $S(\alpha;\beta)$ donc :

$$\boldsymbol{S\left(-1\,;-\frac{9}{4}\right)}$$