

**Exercice 1 [2 points]**

Simplifier :

$$A = \frac{e^{498}}{(e^{100})^5 \times e^{-3}}$$

**Exercice 2 [6 points]**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

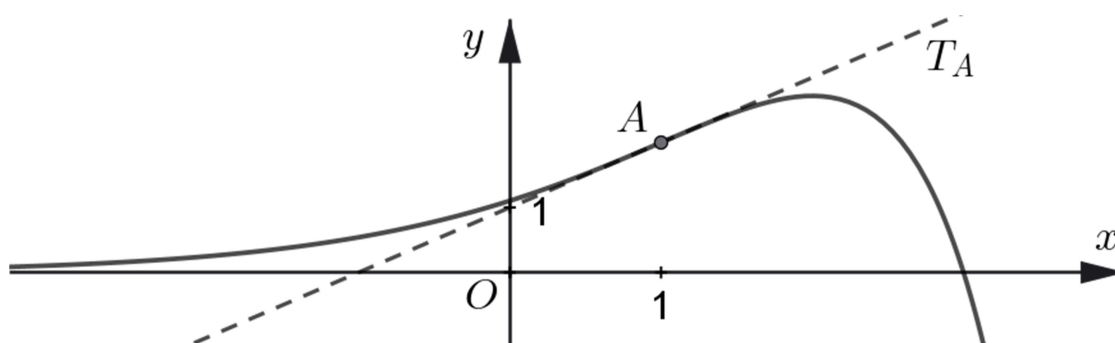
1.  $e^{2x-3} \geq e^{-x+6}$

2.  $e^x(e^x + 2) = 3$

3.  $e^{-x+5} - e = 0$

**Problème [12 points]**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (-x + 3)e^{x-1}$ ,  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan,  $A$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 1,  $T_A$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $A$  :



La figure n'est donnée qu'à titre indicatif : elle ne peut pas servir d'argument pour répondre en totalité ou en partie à l'une des questions suivantes.

On note  $(Ox)$  l'axe des abscisses.

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  et  $(Ox)$  ont un seul point commun, en préciser les coordonnées.

2. Calculer  $f'(x)$ .

3. Déterminer l'équation réduite de  $T_A$ .

4. Etudier le signe de  $f'(x)$ , en déduire le tableau de variation de  $f$ .

5. Préambule :

On cherche à savoir s'il existe une tangente à  $\mathcal{C}$  passant par l'origine  $O$  du repère.

Soit  $B(b; f(b))$  un point de  $\mathcal{C}$  et  $T_B$  la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $B$ .

a. Montrer que le point de  $T_B$  d'abscisse nulle a pour ordonnée :  $f(b) - bf'(b)$ .

b. Montrer que les équations  $f(x) - xf'(x) = 0$  et  $x^2 - 3x + 3 = 0$  sont équivalentes puis résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x^2 - 3x + 3 = 0$ .

c. Répondre à la problématique évoquée dans le préambule.

6. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = f(x) - (x + 1)$ .

a. Déterminer  $h'(x)$  puis  $h''(x)$  où  $h''$  est la fonction dérivée de  $h'$  sur  $\mathbb{R}$ .

b. Etudier de signe de  $h''(x)$ , en déduire les variations de  $h'$  puis le signe de  $h'(x)$ .

c. En déduire les variations de  $h$  puis dresser le tableau de signes de  $h(x)$ .

d. Que dire de la position relative de  $T_A$  et  $\mathcal{C}$  ?

## Corrigé

### Exercice 1

$$A = \frac{e^{498}}{(e^{100})^5 \times e^{-3}} = \frac{e^{498}}{e^{100 \times 5} \times e^{-3}} = \frac{e^{498}}{e^{500} \times e^{-3}} = \frac{e^{498}}{e^{500+(-3)}} = \frac{e^{498}}{e^{497}} = e^{498-497} = e^1 = e$$

### Exercice 2

1. On a les équivalences :

$$e^{2x-3} \geq e^{-x+6} \Leftrightarrow 2x-3 \geq -x+6 \Leftrightarrow 2x+x \geq 6+3 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{3} \Leftrightarrow x \geq 3$$

L'ensemble des solutions est :  $S = [3; +\infty[$ .

2. On a les équivalences :  $e^x(e^x + 2) = 3 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 2e^x = 3 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0$ .

En posant  $X = e^x$ , on obtient :

$$X^2 + 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X+3) = 0 \Leftrightarrow X-1 = 0 \text{ ou } X+3 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -3$$

•  $X = 1$  s'écrit :  $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

•  $X = -3$  s'écrit :  $e^x = -3$ , ce qui est impossible ( $\forall a \in \mathbb{R}, e^a > 0$ )

L'équation  $e^x(e^x + 2) = 3$  admet pour unique solution 0, autrement dit :  $S = \{0\}$ .

3. On a les équivalences :

$$e^{-x+5} - e = 0 \Leftrightarrow e^{-x+5} = e \Leftrightarrow e^{-x+5} = e^1 \Leftrightarrow -x+5 = 1 \Leftrightarrow -x = 1-5 \Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = 4$$

L'équation  $e^{-x+5} - e = 0$  admet pour unique solution 4, autrement dit :  $S = \{4\}$ .

### Problème

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (-x+3)e^{x-1}$ ,  $A \in \mathcal{C}$  d'abscisse 1,  $T$  tangente en  $A$ ,

#### 1. Point(s) commun(s) entre $\mathcal{C}$ et $(Ox)$

L'abscisse d'un point commun entre  $\mathcal{C}$  et  $(Ox)$  est une solution de l'équation  $f(x) = 0$ , c'est-à-dire :  $(-x+3)e^{x-1} = 0$ . Or, on a l'équivalence :  $(-x+3)e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow -x+3 = 0 \text{ ou } e^{x-1} = 0$ .

•  $-x+3 = 0 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3$  •  $\forall a \in \mathbb{R}, e^a \neq 0$  donc :  $e^{x-1}$  est impossible

L'équation  $f(x) = 0$  a pour unique solution 3, donc  $\mathcal{C}$  et  $(Ox)$  ont **un seul point en commun, de coordonnées (3; 0)**.

#### 2. Calcul de $f'(x)$

Rappel :  $(uv)' = u'v + v'u$  et  $(e^u)' = u'e^u$

$$f'(x) = (-1)e^{x-1} + 1e^{x-1} \times (-x+3)$$

$$f'(x) = e^{x-1}[-1 + (-x+3)]$$

$$f'(x) = e^{x-1}(-1-x+3)$$

Conclusion :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x-1}(-x+2)$ .

#### 3. Équation réduite de $T_A$

$T_A$  tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1 admet pour équation :  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ .

Or,  $f'(1) = e^{1-1}(-1+2) = e^0 \times 1 = 1 \times 1 = 1$  et  $f(1) = (-1+3)e^{1-1} = 2e^0 = 2$

On obtient :  $y = 1(x-1) + 2$ , c'est-à-dire :  $y = x + 1$ .

#### 4. Signe de $f'(x)$ et tableau de variations de $f$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x-1}(-x+2)$

•  $\forall a \in \mathbb{R}, e^a > 0$  donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-1} > 0$  •  $-x+2 = 0 \Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$

règle : «  $ax + b$  est du signe de  $a$  à droite de sa racine »

tableau de variation

| $x$                      | $-\infty$                                                  | 2 | $+\infty$ |
|--------------------------|------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $e^{x-1}$                | +                                                          |   | +         |
| $-x+2$                   | +                                                          | 0 | -         |
| $f'(x)$                  | +                                                          | 0 | -         |
| Sens de variation de $f$ | <div style="text-align: center;"><math>e</math><br/></div> |   |           |

$$f(2) = (-2+3)e^{2-1} = 1e^1 = e$$

5. Préambule : on cherche à savoir si une tangente à  $\mathcal{C}$  peut passer par l'origine du repère.

Soit  $B(b; f(b))$  un point de  $\mathcal{C}$  et  $T_B$  la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $B$ .

a. **Montrer que le point de  $T_B$  d'abscisse nulle a pour ordonnée :  $f(b) - bf'(b)$ .**

La tangente  $T_B$  au point d'abscisse  $b$  admet pour équation :  $y = f'(b)(x - b) + f(b)$ ,

qui s'écrit aussi :  $y = f'(b)x - bf'(b) + f(b)$ ,

pour  $x = 0$  on obtient :  $y = f'(b) \times 0 - bf'(b) + f(b)$ , c'est-à-dire :  $y = f(b) - bf'(b)$ .

Le point de  $T_B$  d'abscisse nulle a bien pour ordonnée :  $f(b) - bf'(b)$ .

b. **Montrer que les équations  $f(x) - xf'(x) = 0$  et  $x^2 - 3x + 3 = 0$  sont équivalentes puis résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x^2 - 3x + 3 = 0$ .**

Avec les notations de l'exercice on a les équivalences :

$$f(x) - xf'(x) = 0 \Leftrightarrow (-x + 3)e^{x-1} - xe^{x-1}(-x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1}[(-x + 3) - x(-x + 2)] = 0 \Leftrightarrow e^{x-1}(-x + 3 + x^2 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1}(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0 \quad (e^{x-1} \neq 0)$$

$x^2 - 3x + 3$  est de la forme  $a'x^2 + b'x + c'$  avec  $a' = 1$ ,  $b' = -3$ ,  $c' = 3$ , de discriminant :

$$\Delta = b'^2 - 4a'c' = (-3)^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3 < 0$$

$\Delta < 0$  donc  $x^2 - 3x + 3$  n'a pas de racine réelle, autrement dit :  $x^2 - 3x + 3 = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

c. **Répondre à la problématique soulevée dans le préambule.**

$x^2 - 3x + 3 = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$  et cette équation est équivalente à  $f(x) - xf'(x) = 0$  donc l'équation  $f(x) - xf'(x) = 0$  n'a pas de solution réelle donc l'ordonnée à l'origine de  $T_B$  ne peut pas être nulle donc il n'existe aucun point  $B$  de  $\mathcal{C}$  pour lequel la tangente passe par l'origine du repère par conséquent **aucune tangente de  $\mathcal{C}$  ne passe par l'origine du repère.**

6.  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - (x + 1)$

a. **Déterminer  $h'(x)$  puis  $h''(x)$  où  $h''$  est la fonction dérivée de  $h'$  sur  $\mathbb{R}$ .**

Soit  $x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - 1 = e^{x-1}(-x + 2) - 1$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^{x-1}(-x + 2) - 1$$

$$h''(x) = 1e^{x-1}(-x + 2) + (-1)e^{x-1} - 0$$

$$h''(x) = e^{x-1}(-x + 2 - 1)$$

$$h''(x) = e^{x-1}(-x + 1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = e^{x-1}(-x + 1)$$

b. **Etudier de signe de  $h''(x)$ , en déduire les variations de  $h'$  puis le signe de  $h'(x)$ .**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}, e^{x-1} > 0$  donc le signe de  $h''(x)$  est celui de  $(-x + 1)$ .

On a les équivalences :  $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$ .

Règle : «  $ax + b$  est du signe de  $a$  à droite de sa racine ».

$h'$  est croissante sur  $] -\infty; 1]$  et décroissante sur  $[1; +\infty[$  donc  $h'$  admet pour maximum  $h'(1)$ .

$$\text{Or, } h'(1) = e^{1-1}(-1 + 2) - 1 = e^0 \times 1 - 1 = 1 \times 1 - 1 = 0,$$

donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq 0$  et  $h'(x)$  ne s'annule que pour  $x = 1$ .

c. **En déduire les variations de  $h$  puis dresser le tableau de signes de  $h(x)$ .**

Il résulte de l'étude du signe de  $h'(x)$  que  $h$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Or,  $h(1) = f(1) - (1 + 1) = 2 - 2 = 0$ , donc on obtient le tableau de signes :

|        |           |             |           |
|--------|-----------|-------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 1           | $+\infty$ |
| $h(x)$ | +         | $\emptyset$ | -         |

d. **Que dire de la position relative de  $T$  et  $\mathcal{C}$  ?**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - (x + 1)$ ,  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  et  $T_A : y = x + 1$  donc le signe de  $h(x)$  indique la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $T_A$  :

- sur  $] -\infty; 1[$  :  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $T_A$
- $\mathcal{C}$  et  $T_A$  se coupe en  $A(1; 2)$
- sur  $] 1; +\infty[$  :  $\mathcal{C}$  est en dessous de  $T_A$