

Exercice 1 [15 points]

Un certain gâteau qui sort du four a une température de 90° .

On note u_n sa température au bout de n minutes et on admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
 $u_{n+1} = 0,8u_n + 4$; ainsi, $u_0 = 90$.

1. Déterminer u_1 et u_2 : (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?
2. Le programme Python suivant demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n puis affiche la valeur de u_n :

```
1 U=90
2 n=int(input("n="))
3 for k in range(1, ...
4     U= ...
5 print(U)
```

Écrire sur la copie, en les complétant, les ligne 3 et 4.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - 20$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
 - c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4.
 - a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -14 \times 0,8^n$.
 - b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
5. Le gâteau est consommable sans se brûler lorsque sa température est inférieure ou égale à 30° : à l'aide de la calculatrice déterminer combien de minutes on doit patienter avant d'entamer le gâteau.
On donnera les deux termes de la suite (u_n) permettant de conclure.
6. La température du gâteau peut-elle descendre en dessous de 20° ?

Exercice 2A [5 points]

On souhaite calculer $S = 3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 871$. Pour ce faire, on considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $r = 4$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. En déduire l'entier naturel non nul p tel que : $u_p = 871$.
3. Calculer S .

Exercice 2B [5 points]

On souhaite calculer $S' = 0,25 + 0,5 + 1 + 2 + \dots + 8192$. Pour ce faire, on considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 0,25$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer v_n en fonction de n .
2. Calculer v_{15} .
3. Calculer S' .

Corrigé

Exercice 1

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			
DEUXIÈME CONDITION SI NÉCESSAIRE			
Graph1	Graph2	Graph3	
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)			
nMin=0			
■ %u(n+1) = 0.8*u(n)+4			
u(0) = 90			
u(1) =			
■ %v(n+1) = u(n+1)-20			
v(0) =			
v(1) =			
■ %w(n+1) =			

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			
APP SUR + POUR ΔTb1			
n	u	v	
0	90	70	
1	76	56	
2	64.8	44.8	
3	55.84	35.84	
4	48.672	28.672	
5	42.938	22.938	
6	38.35	18.35	
7	34.68	14.68	
8	31.744	11.744	
9	29.395	9.3952	
10	27.516	7.5162	
n=0			

Sort du four : 90° , u_n sa température au bout de n minutes, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 4$; $u_0 = 90$.

1. Déterminer u_1 et u_2 : (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

$$u_1 = 0,8u_0 + 4 = 0,8 \times 90 + 4 = 72 + 4 = 76$$

$$u_2 = 0,8u_1 + 4 = 0,8 \times 76 + 4 = 64,8$$

Résumons : $u_1 = 76$ et $u_2 = 64,8$.

$$\text{On a : } u_1 - u_0 = 76 - 90 = -14 \text{ et } u_2 - u_1 = 64,8 - 76 = -11,2.$$

On constate que $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\text{On a : } \frac{u_1}{u_0} = \frac{76}{90} \approx 0,844 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{64,8}{76} \approx 0,853$$

On constate que : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. Le programme Python suivant demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n puis affiche la valeur de u_n :

```
3 for k in range(1,n+1):
```

```
4     U=0.8*U+4
```

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 20$

a. Déterminer v_0 .

Pour $n = 0$ on obtient : $v_0 = u_0 - 20 = 90 - 20 = 70$; $v_0 = 70$.

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0,8u_n + 4 - 20 = 0,8u_n - 16 = 0,8 \left(u_n - \frac{16}{0,8} \right) = 0,8(u_n - 20) = 0,8 \times v_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,8 \times v_n$ et $0,8$ est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$.

Autre rédaction (tolérée en première uniquement) :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 20}{u_n - 20} = \frac{0,8u_n + 4 - 20}{u_n - 20} = \frac{0,8u_n - 16}{u_n - 20} = \frac{0,8 \left(u_n - \frac{16}{0,8} \right)}{u_n - 20} = \frac{0,8(u_n - 20)}{u_n - 20} = 0,8$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,8$ et $0,8$ est une constante donc (v_n) est géométrique de raison $0,8$.

c. v_n puis u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que (v_n) est géométrique donc : $v_n = v_0 \times q^n$ (cours), or $v_0 = 70$ et $q = 0,8$ donc : $v_n = 70 \times 0,8^n$. Or, $v_n = u_n - 20$ donc : $70 \times 0,8^n = u_n - 20$, i.e. : $u_n = 70 \times 0,8^n + 20$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 70 \times 0,8^n + 20$.

4. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = -14 \times 0,8^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 70 \times 0,8^n + 20$ et $u_{n+1} = 70 \times 0,8^{n+1} + 20$, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 70 \times 0,8^{n+1} + 20 - (70 \times 0,8^n + 20) = 70 \times 0,8^n \times 0,8 - 70 \times 0,8^n \times 1 \\ &= 70 \times 0,8^n (0,8 - 1) = 70 \times 0,8^n \times (-0,2) = 70 \times (-0,2) \times 0,8^n = -14 \times 0,8^n \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -14 \times 0,8^n.$$

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $0,8 > 0$ donc $0,8^n > 0$, $-14 < 0$, $-14 \times 0,8^n < 0$ donc : $u_{n+1} - u_n < 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

5. Le gâteau est consommable sans se brûler lorsque sa température est inférieure ou égale à 30° : à l'aide de la calculatrice déterminer combien de minutes on doit patienter avant d'entamer le gâteau. On donnera les deux termes de la suite (u_n) permettant de conclure.

On a : $u_8 \approx 31,7 > 30$ et $u_9 \approx 29,4 \leq 30$ donc il faudra attendre 9 minutes.

6. La température du gâteau peut-elle descendre en dessous de 20° ?

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - 20 = 70 \times 0,8^n + 20 - 20 = 70 \times 0,8^n > 0$.

On a : $u_n - 20 > 0$ autrement dit : $u_n > 20$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 20$ donc la température du gâteau ne descend jamais en dessous de 20° .

Exercice 2A

$S = 3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 871$, (u_n) suite arithmétique, $u_1 = 3$ et $r = 4$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 + (n - 1)r$ (cours),

or $u_1 = 3$ et $r = 4$, donc : $u_n = 3 + (n - 1) \times 4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 4n - 1$$

2. En déduire l'entier naturel non nul p tel que : $u_p = 871$.

On cherche $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $u_p = 871 : 4p - 1 = 871 \Leftrightarrow 4p = 872 \Leftrightarrow p = \frac{872}{4} \Leftrightarrow p = 218$.

Conclusion : $p = 218$.

3. Calculer S .

$$\begin{aligned} S &= 3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 871 = u_1 + u_2 + \dots + u_{218} = \frac{(u_1 + u_{218}) \times 218}{2} = \frac{(3 + 871) \times 218}{2} \\ &= \frac{874 \times 218}{2} = 95\,266 \end{aligned}$$

Conclusion : $S = 95\,266$.

Exercice 2B [5 points]

$S' = 0,25 + 0,5 + 1 + 2 + \dots + 8192$, (v_n) géométrique, $v_0 = 0,25$ et $q = 2$.

1. Exprimer v_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 0,25 \times 2^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0,25 \times 2^n$$

2. Calculer v_{15} .

$$v_{15} = 0,25 \times 2^{15} = 8\,192$$

$$v_{15} = 8\,192$$

3. Calculer S' .

$$\begin{aligned} S' &= 0,25 + 0,5 + 1 + 2 + \dots + 8192 = v_0 + \dots + v_{15} = v_0 \times \frac{1 - q^{16}}{1 - q} = 0,25 \times \frac{1 - 2^{16}}{1 - 2} \\ &= 0,25 \times \frac{1 - 2^{16}}{-1} = 0,25(2^{16} - 1) = 16\,383,75 \end{aligned}$$

Conclusion : $S' = 16\,383,75$.