

Exercice 1 [14 points]

Calculer $f'(x)$, rappeler la formule utilisée pour les questions 3., 4., 5. et 6. uniquement.

1. $f(x) = 5x^2 - x$

2. $f(x) = x^7 - 2x^4 + 5$

3. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

4. $f(x) = \frac{7x - 1}{2x - 3}$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3}$

6. $f(x) = (-x^4 + x + 2)^7$

Exercice 2 [6 points]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, on ne demande pas de tracer cette courbe.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse 3.

BONUS

Existe-t-il un point B de $\mathcal{C}$ distinct de A en lequel la tangente est parallèle à T ?

Corrigé**Exercice 1**

1. $f(x) = 5x^2 - x$

$$f'(x) = 5 \times 2x - 1$$

$$\boxed{f'(x) = 10x - 1}$$

2. $f(x) = x^7 - 2x^4 + 5$

$$f'(x) = 7x^6 - 2 \times 4x^3 + 0$$

$$\boxed{f'(x) = 7x^6 - 8x^3}$$

3. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

$$\text{Rappel : } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$u(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$u'(x) = 4x^3 + 2x$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4x^3 + 2x}{2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}}$$

$$f'(x) = \frac{2(2x^3 + x)}{2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

$$4. f(x) = \frac{7x - 1}{2x - 3}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{7(2x - 3) - 2(7x - 1)}{(2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{14x - 21 - 14x + 2}{(2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-19}{(2x - 3)^2}$$

$$5. f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 3) - 2x(x^2 + 5)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 6x - 2x^3 - 10x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$6. f(x) = (-x^4 + x + 2)^7$$

$$\text{Rappel : } (u^7)' = 7u^6 \times u'$$

$$u(x) = -x^4 + x + 2$$

$$u'(x) = -4x^3 + 1$$

$$f'(x) = 7(-x^4 + x + 2)^6(-4x^3 + 1)$$

$$f'(x) = (-28x^3 + 7)(-x^4 + x + 2)^6$$

Exercice 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Calculer $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 5$$

$$\boxed{f'(x) = x^2 - 6x + 5}$$

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse 3.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a admet pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour $a = 3$ on obtient : $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$.

Or,

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 3(3)^2 + 5(3) + 1 = 9 - 3 \times 9 + 15 + 1 = -2$$

$$f'(3) = (3)^2 - 6(3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

On obtient :

$$y = -4(x - 3) + (-2)$$

$$y = -4x + 12 - 2$$

$$y = -4x + 10$$

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 admet pour équation réduite : $y = -4x + 10$.

BONUS

Il s'agit de déterminer s'il existe $x \neq 3$ tel que : $f'(x) = -4$, qui s'écrit : $x^2 - 6x + 5 = -4$,

On a les équivalences :

$$x^2 - 6x + 5 = -4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Il n'existe pas de point B de $\mathcal{C}$ distinct de A en lequel la tangente est parallèle à T .