

Exercice 1 [4 points]

Factoriser dans $\mathbb{R}$: $A(x) = 4x^2 - 9x$, $B(x) = -x^2 + 5$ et $C(x) = (x - 4)^2 - 9x$.

Exercice 2 [3 points]

Donner sans justification sur la copie les racines de : $-2x^2 + x + 6$, puis en rappelant la règle utilisée, dresser le tableau de signes de cette expression.

En déduire les solutions de l'inéquation : $x + 6 > 2x^2$.

Exercice 3 [3 points]

Pour tout réel x on pose :

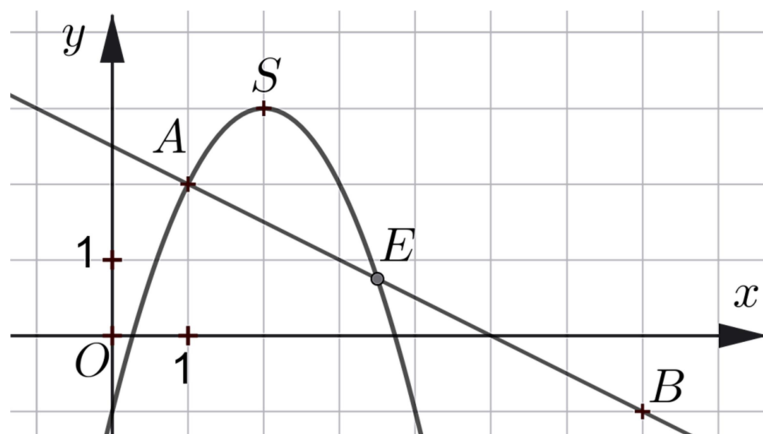
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{3}$$

1. Déterminer le tableau de variation de f .
2. Comparer les deux nombres : $f(1 + 10^{-50})$ et $f(1 + 2 \times 10^{-50})$.

Exercice 4 [8 points]

Dans un repère orthonormé on donne $A(1; 2)$, $B(7; -1)$, on note f la fonction dont la parabole $\mathcal{P}$ représentative passe par A et admet pour sommet $S(2; 3)$.

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point d'intersection E de (AB) et $\mathcal{P}$, E distinct de A :



1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
En déduire que, pour tout réel x , on a : $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .
3. Montrer que les abscisses des points communs à (AB) et $\mathcal{P}$ sont les solutions de l'équation : $-2x^2 + 9x - 7 = 0$.
4. En déduire x_E puis calculer y_E .
5. * Il existe une droite (d) passant par A et n'ayant pas d'autre point en commun avec $\mathcal{P}$.
Déterminer l'équation réduite de (d) .

Exercice 5 [2 points]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2(x^2 - 5) = -4$.

Corrigé

Exercice 1

Factoriser dans $\mathbb{R}$: $A(x) = 4x^2 - 9x$, $B(x) = -x^2 + 5$ et $C(x) = (x - 4)^2 - 9x$

$$A(x) = 4x^2 - 9x = x(4x - 9)$$

$$B(x) = -x^2 + 5 = 5 - x^2 = (\sqrt{5})^2 - (x)^2 = (\sqrt{5} + x)(\sqrt{5} - x) = (x + \sqrt{5})(-x + \sqrt{5})$$

$$C(x) = (x - 4)^2 - 9x = x^2 - 8x + 16 - 9x = x^2 - 17x + 16$$

$x^2 - 17x + 16$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -17$ et $c = 16$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-17)^2 - 4(1)(16) = 289 - 64 = 225$.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{225} = 15$$

$\Delta > 0$ donc $x^2 - 17x + 16$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+17 - \sqrt{225}}{2(1)} = \frac{17 - 15}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+17 + \sqrt{225}}{2(1)} = \frac{17 + 15}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Rappel : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

donc : $x^2 - 17x + 16 = 1(x - 1)(x - 16) = (x - 1)(x - 16)$.

Les formes factorisées demandées sont :

$$A(x) = x(4x - 9), B(x) = (x + \sqrt{5})(-x + \sqrt{5}) \text{ et } C(x) = (x - 1)(x - 16).$$

i Si on remarque que 1 est une racine évidente de C , alors on obtient bien plus rapidement une factorisation de $C(x)$.

Exercice 2

• Donner sans justification sur la copie les racines de : $-2x^2 + x + 6$, puis en rappelant la règle utilisée, dresser le tableau de signes de cette expression.

Les racines sont : $x_1 = -1,5$ et $x_2 = 2$.

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-1,5$		2	$+\infty$
Signe de $-2x^2 + x + 6$	$-$	0	$+$	0	$-$



• En déduire les solutions de l'inéquation : $x + 6 > 2x^2$.

On a les équivalences : $x + 6 > 2x^2 \Leftrightarrow x + 6 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 6 > 0$.

En utilisant le tableau de signes précédent, on obtient : $S =] - 1,5; 2[$.

Exercice 3

Pour tout réel x on pose :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{3}$$

1. Déterminer le tableau de variation de f .

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{3} \text{ est de la forme } ax^2 + bx + c \text{ avec } a = \frac{1}{2}, b = -4 \text{ et } c = \frac{5}{3}.$$

On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+4}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\beta = f(\alpha) = f(4) = \frac{1}{2}(4)^2 - 4(4) + \frac{5}{3} = 8 - 16 + \frac{5}{3} = -8 + \frac{5}{3} = -\frac{19}{3}$$

$$a = \frac{1}{2}, a > 0 \text{ donc :}$$

f est $\searrow$ sur $] - \infty; \alpha]$ c'est-à-dire $] - \infty; 4]$ et f est $\nearrow$ sur $[\alpha; +\infty[$ c'est-à-dire $[4; +\infty[$

x	$-\infty$	$\alpha = 4$	$+\infty$
Sens de variation de f	$\swarrow \quad \beta = -\frac{19}{3} \quad \nearrow$		

2. Comparer les deux nombres : $f(1 + 10^{-50})$ et $f(1 + 2 \times 10^{-50})$.

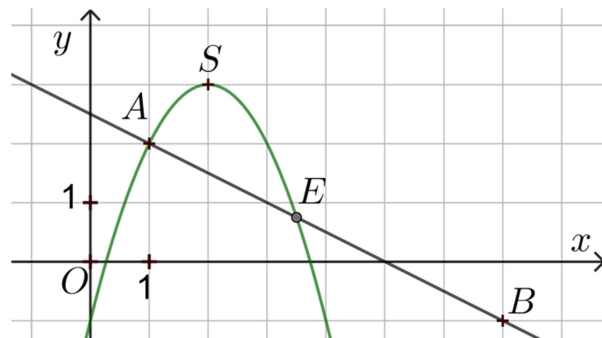
On a : $1 + 10^{-50} < 1 + 2 \times 10^{-50}$.

Or, les nombres $1 + 10^{-50}$ et $1 + 2 \times 10^{-50}$ appartiennent à l'intervalle $] -\infty; 4]$ sur lequel f est $\searrow$ donc inverse le sens de la relation d'ordre, par conséquent : $f(1 + 10^{-50}) > f(1 + 2 \times 10^{-50})$.

Exercice 4 [7 points]

Dans un repère orthonormé, $A(1; 2)$, $B(7; -1)$, on note f la fonction dont la parabole $\mathcal{P}$ représentative passe par A et admet pour sommet $S(2; 3)$.

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point d'intersection E de (AB) et $\mathcal{P}$, E distinct de A :



1. • Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

La forme canonique de $f(x)$ s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

On a : $S(2; 3)$, or $S(\alpha; \beta)$ donc $\alpha = 2$ et $\beta = 3$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - 2)^2 + 3$.

On sait que $A \in \mathcal{P}$ donc $f(x_A) = y_A$, or $A(1; 2)$ donc :

$$a(1 - 2)^2 + 3 = 2 \Leftrightarrow a \times 1 + 3 = 2 \Leftrightarrow a = 2 - 3 \Leftrightarrow a = -1$$

La forme canonique de $f(x)$ est donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -(x - 2)^2 + 3$.

En déduire que, pour tout réel x , on a : $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

Développons la forme canonique de $f(x)$.

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 3 = -(x^2 - 4x + 4) + 3 = -x^2 + 4x - 4 + 3 = -x^2 + 4x - 1$$

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .

Rappelons que : $A(1; 2)$, $B(7; -1)$.

$x_A \neq x_B$

En notant a le coefficient directeur de la droite (AB) , on a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 2}{7 - 1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$y = a(x - x_A) + y_A$$

$$y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{4}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

La droite (AB) admet pour équation réduite : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

3. M.Q. les abscisses des points communs à (AB) et $\mathcal{P}$ sont les solutions de $-2x^2 + 9x - 7 = 0$.

Les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et (AB) sont les solutions de : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

En utilisant la forme développée de $f(x)$, on a les équivalences :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + \frac{8}{2}x + \frac{1}{2}x - \frac{2}{2} - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(-x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{7}{2}\right) = 2 \times 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 9x - 7 = 0$$

Conclusion :

Les abscisses des points communes à (AB) et $\mathcal{P}$ sont bien les solutions de : $-2x^2 + 9x - 7 = 0$.

4. En déduire x_E puis calculer y_E .

On a les équivalences :

$$-2x^2 + 9x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(-2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } -2x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -2x = -7 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{7}{2}$$

Or, $x_E \neq x_A$ et $x_A = 1$ donc $x_E = \frac{7}{2}$.

En remplaçant dans l'équation réduite de la droite (AB) :

$$y_E = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{7}{4} + \frac{10}{4} = \frac{3}{4}$$

Résumons :

$$E\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

5. Il existe une droite (d) passant par A et n'ayant pas d'autre point en commun avec $\mathcal{P}$.

Déterminer l'équation réduite de (d) .

Rappelons que $A(1; 2)$ et pour tout réel x , $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

En notant m le coefficient directeur de la droite (d) , cette dernière admet une équation :

$y = m(x - x_A) + y_A$ c'est-à-dire : $y = m(x - 1) + 2$, ou encore : $y = mx - m + 2$.

Les solutions de : $-x^2 + 4x - 1 = mx - m + 2$ sont les abscisses du(des) point(s) commun(s) à $\mathcal{P}$.

Cette équation s'écrit aussi : $-x^2 + 4x - 1 - mx + m - 2 = 0$, i.e. : $-x^2 + (4 - m)x + m - 3 = 0$

et comme elle admet une seule solution (l'abscisse de l'unique point commun) son discriminant est nul, c'est-à-dire :

$$(4 - m)^2 - 4(-1)(m - 3) = 0 \Leftrightarrow 16 - 8m + m^2 + 4(m - 3) \Leftrightarrow 16 - 8m + m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow (m)^2 - 2(m)(2) + (2)^2 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

La droite d admet pour équation : $y = 2x - 2 + 2$, c'est-à-dire : $y = 2x$.

Conclusion :

La droite d admet pour équation réduite $y = 2x$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2(x^2 - 5) = -4$.

En posant $X = x^2$, cette équation s'écrit :

$$X(X - 5) = -4 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X - 4) = 0 \Leftrightarrow X - 1 = 0 \text{ ou } X - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 4$$

Or, $X = x^2$ donc : $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$.

Les solutions de $x^2(x^2 - 5) = -4$ sont : **-2, -1, 1 et 2.**