

Exercice 1 [2 pts]

Donner la forme canonique de $E(x) = (x - 1)(x - 5)$.

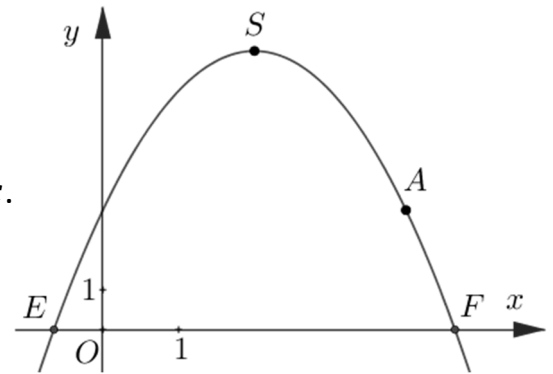
Exercice 2 [4 pts]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2x - 1)(x + 3) \geq 4$

Exercice 3 [8 pts]

Dans un repère orthogonal du plan on note $\mathcal{P}$ la parabole de sommet $S(2; 7)$ passant par $A(4; 3)$. Cette parabole est la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

1. D'après l'allure de la parabole $\mathcal{P}$, déterminer en justifiant brièvement le signe du coefficient a et celui du discriminant Δ .
2. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
 En déduire que pour tout réel x on a : $f(x) = -x^2 + 4x + 3$.
3. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de f .
4. $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en E et F , $x_E < x_F$: déterminer les coordonnées de E et F .



Exercice 4 [4 pts]

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x - 8}{-x^2 + 14x - 49} \leq 0$$

Exercice 5 [2 pt]

Préambule



La calculatrice affirme que :

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{24} = 103\,682$$

On souhaite savoir si cette affirmation un peu surprenante est vraie ou bien fausse.

On pose :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

1. Vérifier que : $\varphi^2 = \varphi + 1$.
2. Écrire φ^3 , φ^6 et φ^{12} sous la forme $a\varphi + b$.
3. On rappelle que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$; répondre à la question posée en préambule.

Corrigé

Exercice 1

Donner la forme canonique de $E(x) = (x - 1)(x - 5)$.

Pour tout réel x , on a :

$$E(x) = (x - 1)(x - 5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5$$

$$= (x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$$

$$\text{On a : } E(x) = (x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4.$$

La forme canonique est : $E(x) = (x - 3)^2 - 4$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2x - 1)(x + 3) \geq 4$.

On a les équivalences :

$$(2x - 1)(x + 3) > 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - x - 3 > 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 > 0$$

$2x^2 + 5x - 7$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = 5$ et $c = -7$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(-7) = 25 + 56 = 81$$

$\Delta > 0$ donc $2x^2 + 5x - 7$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{-5 - 9}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{-5 + 9}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$		1	$+\infty$
$2x^2 + 5x - 7$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

On déduit de ce tableau de signes l'ensemble des solutions de $2x^2 + 5x - 7 \geq 0$:

$$S =] - \infty; -\frac{7}{2}] \cup [1; +\infty[$$

Exercice 3

$\mathcal{P}$ la parabole de sommet $S(2; 7)$ passant par $A(4; 3)$.

1. D'après l'allure de la parabole $\mathcal{P}$, déterminer en justifiant brièvement le signe du coefficient a et celui du discriminant Δ .

La parabole $\mathcal{P}$ tourne ses bras vers le bas donc $a < 0$.

La parabole $\mathcal{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses donc $\Delta > 0$.

2. Donner la forme canonique de $f(x)$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x + 3$.

On a : $S(\alpha; \beta)$, or $S(2; 7)$ donc $\alpha = 2$ et $\beta = 7$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - 2)^2 + 7$.

$A(4; 3)$ donc $f(4) = 3$.

Pour $x = 4$, on obtient : $f(4) = a(4 - 2)^2 + 7$ c'est-à-dire : $3 = 4a + 7$,

$$3 - 7 = 4a \Leftrightarrow -4 = 4a \Leftrightarrow a = -1$$

La forme canonique est donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -(x - 2)^2 + 7$.

Développons :

$$f(x) = -(x-2)^2 + 7 = -(x^2 - 4x + 4) + 7 = -x^2 + 4x - 4 + 7 = -x^2 + 4x + 3$$

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x + 3$.

3. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de f .

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x + 3$.

$f(x) = -x^2 + 4x + 3$ avec $a = -1, b = 4$ et $c = 3$.

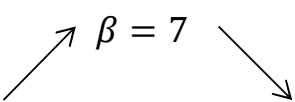
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\beta = f(\alpha) = f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 3 = -4 + 8 + 3 = 7$$

$a = -1, a < 0$ donc :

- f est croissante sur $] -\infty; \alpha]$ c'est-à-dire sur $] -\infty; 2]$
- f est décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ c'est-à-dire sur $[2; +\infty[$

On obtient finalement :

x	$-\infty$	$\alpha = 2$	$+\infty$
Sens de variation de f			

4. $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en E et $F, x_E < x_F$, coordonnées de E et F

Les abscisses des points E et F sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire de l'équation $-x^2 + 4x + 3 = 0$.

$-x^2 + 4x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1, b = 4$ et $c = 3$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-1)(3) = 16 + 12 = 28$.

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

$\Delta > 0$ donc $-x^2 + 4x + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{2(-1)} = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{7})}{2 \times 1} = 2 + \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{2(-1)} = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{7})}{2 \times 1} = 2 - \sqrt{7}$$

Comme $x_E < x_F$, on obtient finalement : $E(2 - \sqrt{7}; 0)$ et $F(2 + \sqrt{7}; 0)$.

Exercice 4

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x - 8}{-x^2 + 14x - 49} \leq 0$$

• Recherche des valeurs interdites

$x^2 - 14x + 49$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = -14$ et $c = 49$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4(1)(49) = 196 - 196 = 0$.

$\Delta = 0$ donc $x^2 - 14x + 49$ admet une seule racine :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{+14}{2(1)} = 7$$

Il y a une seule valeur interdite : 7.

• Étude de $2x - 8$

$$2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x = 4$$

• tableau de signes

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

Règle dans le cas $\Delta = 0$: « lorsqu'elle admet une seule racine, $ax^2 + bx + c$ est partout du signe de a et s'annule une fois ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	4	7	$+\infty$
$2x - 8$	-	0	+	+
$-x^2 + 14x - 49$	-		0	-
$Q(x)$	+	0	-	-



La dernière ligne de ce tableau de signe permet d'obtenir l'ensemble des solutions de :

$$\frac{2x - 8}{-x^2 + 14x - 49} \leq 0$$

et on obtient : $S = [4; 7[\cup]7; +\infty[$.

Exercice 5

Préambule

La calculatrice donne :

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{24} = 103\,682$$

On cherche à savoir si ce résultat surprenant est exact ou bien si la calculatrice se trompe.

On pose :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

1. Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{2 \times 2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 + 1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi \end{aligned}$$

On a donc bien : $\varphi^2 = \varphi + 1$.

2. Écrire φ^3 , φ^6 et φ^{12} sous la forme $a\varphi + b$.

$$\bullet \varphi^3 = \varphi \times \varphi^2 = \varphi(\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$$

$$\varphi^3 = 2\varphi + 1$$

- $\varphi^6 = (\varphi^3)^2 = (2\varphi + 1)^2 = 4\varphi^2 + 4\varphi + 1 = 4(\varphi + 1) + 4\varphi + 1 = 8\varphi + 5$
 $\varphi^6 = 8\varphi + 5$

- $\varphi^{12} = (\varphi^6)^2 = (8\varphi + 5)^2 = 64\varphi^2 + 80\varphi + 25 = 64(\varphi + 1) + 80\varphi + 25$
 $= 144\varphi + 89$
 $\varphi^{12} = 144\varphi + 89$

3. On a montré en 2. que : $\varphi^{12} = 144\varphi + 89$.

$$\begin{aligned}\varphi^{24} &= (\varphi^{12})^2 = (144\varphi + 89)^2 = 144^2\varphi^2 + 2 \times 144\varphi \times 89 + 89^2 \\ &= 20736(\varphi + 1) + 25632\varphi + 7921 = (20736 + 25632)\varphi + 20736 + 7921 \\ &= 46\,368\varphi + 28657 \\ &= 46\,368 \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 28657 \\ &= 51\,841 + 23\,184\sqrt{5}\end{aligned}$$

Supposons $\varphi^{24} = 103\,682$, alors $51\,841 + 23\,184\sqrt{5} = 103\,682$

donc $\sqrt{5} = \frac{103\,682 - 51\,841}{23\,184}$ donc $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux, donc $\varphi^{24} \neq 103\,682$

Conclusion :

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{12} \neq 103\,682$$

La calculatrice se trompe.

Complément

Avec GeoGebra :

1	phi:=(1+sqrt(5))/2
☐	→ phi := $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$
2	phi^24
☐	→ 23184 $\sqrt{5}$ + 51841
3	\$2
☐	≈ 103681.9999904